



**Zentrale Abiturprüfung 2013
Nachschreibtermin
24.05.2013**

**Weiterer Leistungskurs
Mathematik
(mit CAS)**

Fachbereich Technik

Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler

Aufgabenstellung

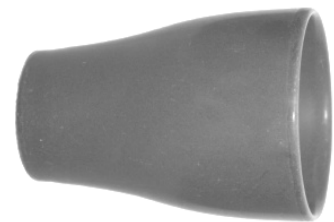
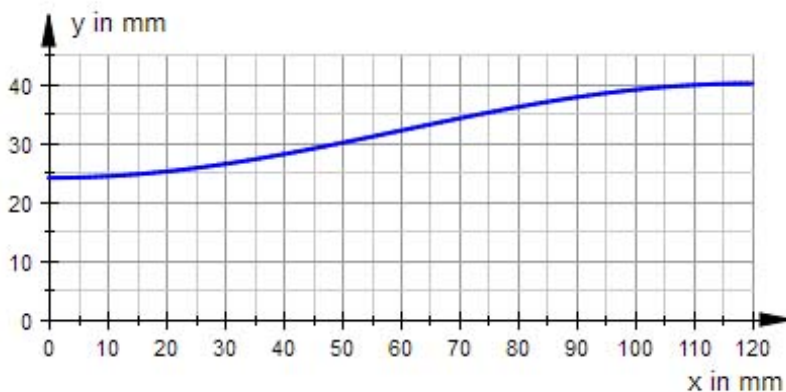
Aufgabe 1

Gegenstände werden von Designern häufig in einer Skizze entworfen und für die computergestützte industrielle Herstellung durch eine geeignete mathematische Modellierung beschrieben. Für einen neuen Kaffeebecher liegt bereits eine Modellierung vor. Sie lässt sich durch die Funktion f mit

$$f(x) = 32 - 8 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{120} \cdot x\right) \text{ für } 0 \leq x \leq 120$$

beschreiben (alle Angaben in mm).

f beschreibt den **äußeren Rand** des 120 mm hohen, symmetrisch zur x -Achse liegenden Rotationskörpers. Der untere Rand des Bodens des Bechers befindet sich bei $x_B = 0$. Der Graph der Funktion f ist nachfolgend dargestellt.



- 1.1 Berechnen Sie die Masse des Kaffeebechers unter der Annahme, dass die Wandstärke des Bechers überall 2 mm beträgt und die Dichte des verwendeten Materials $1,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ beträgt.

5 Punkte

Im Folgenden ist die Beschreibung der Konturlinie mit ganzrationalen Funktionen vorgesehen.

- 1.2 Die ganzrationale Funktion g dritten Grades soll die folgenden Eigenschaften besitzen: Die Punkte $P_1(0 | f(0))$, $P_2(60 | f(60))$ und $P_3(120 | f(120))$ liegen auf dem Graphen von g . Die Steigungen von g und f an der Stelle $x_T = 60$ sind gleich. Stellen Sie das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten von g auf und geben Sie den dazugehörigen Funktionsterm an.

8 Punkte



Verwenden Sie im Folgenden für den **äußeren Rand** des Bechers die Funktion g mit der Funktionsgleichung

$$g(x) = \frac{2-\pi}{54000}x^3 + \frac{\pi-2}{300}x^2 + \frac{6-2\pi}{15}x + 24, \quad 0 \leq x \leq 120$$

Der **innere Rand** des Bechers soll durch die Funktion h mit der Funktionsgleichung

$$h(x) = -\frac{1}{48000}x^3 + \frac{3}{800}x^2 - \frac{1}{60}x + 22, \quad 2 \leq x \leq 120$$

modelliert werden.

1.3 Stellen Sie die Graphen der Funktionen g und h dar (ein Koordinatensystem).

4 Punkte

1.4 Überprüfen Sie an den Intervallgrenzen und Wendepunkten der Funktionen, ob sich bei Verwendung der Funktionen g und h eine Wandstärke in y -Richtung von 2 mm ergibt.

Hinweis: Auf die Untersuchung des hinreichenden Kriteriums bezüglich der Wendepunkte kann hier verzichtet werden.

6 Punkte

1.5 Weisen Sie nach, dass bei Verwendung der Funktionen g und h der Mittelwert der Wandstärke in y -Richtung etwa 2 mm beträgt und die geforderte Wandstärke von $2 \text{ mm} \pm 2\%$ an **jeder** Stelle des Bechers eingehalten wird.

Hinweis: Der Mittelwert einer Funktion f über dem Intervall $[a;b]$ wird mit

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx \quad \text{berechnet.}$$

10 Punkte

1.6 Weisen Sie nach, dass der aus g und h modellierte Kaffeebecher mindestens $1/3 \text{ l}$ Inhalt fasst und

leiten Sie her, an welcher Position eine Eichmarke für einen Inhalt von $0,3 \text{ l}$ angebracht werden muss.

7 Punkte

1.7 Der in der Grafik der Aufgabenstellung dargestellte äußere Becherrand könnte auch durch eine aus zwei Parabeln zusammengesetzte Funktion modelliert werden, die an einer Stelle zwischen 0 und 120 ineinander übergehen.

Beweisen Sie, dass die gewünschte Form nicht so mit Hilfe von zwei Parabeln zu gestalten ist, dass an der Übergangsstelle die Funktionswerte und die Werte der ersten und zweiten Ableitungen übereinstimmen.

5 Punkte

Aufgabe 1 gesamt: 45 Punkte

Aufgabe 2

Beamer sind Projektionsgeräte, die Bilder für ein Publikum vergrößert auf einer Leinwand darstellen.

Beamer besitzen verschiedene Hilfsmittel, die dafür sorgen, dass das Bild scharf wird und in der Größe veränderbar ist. Diese Hilfsmittel funktionieren in der Regel per Software und sollen im Folgenden untersucht werden.



Abbildung 1

Auf einer Leinwand wird das projizierte Bild durch die Bildeckpunkte

$B_1(-1,8 | 1,0)$, $B_2(-1,8 | -1,0)$, $B_3(1,8 | 1,0)$ und $B_4(1,8 | -1,0)$ beschrieben.

Zunächst wird der Beamer zentral vor der Projektionsfläche positioniert. Die Berechnungen erfolgen in der zweidimensionalen Leinwandebene.

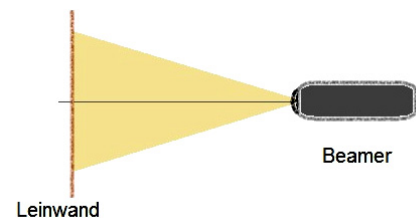


Abbildung 2: Beamer – seitlich betrachtet

2.1 Der Beamer besitzt eine Einstellmöglichkeit für die Bildgröße. Dadurch kann das Bild in jeder Richtung um den Faktor 1,3 vergrößert werden.

Geben Sie eine Matrix an, die diese Vergrößerung des Bildes beschreibt und berechnen Sie die neuen Bildpunkte B_1' bis B_4' .

6 Punkte

Die Bildpunkte B_1 bis B_4 beschreiben in etwa ein Bild im Format 16:9. Diese Formatangabe beschreibt das Verhältnis der Bildbreite zur Bildhöhe.

2.2 Alte Aufnahmen sind oft im Format 4:3 erstellt worden. Die meisten Beamer schalten automatisch um. Die Höhe bleibt dabei unverändert. Lediglich die Breite des Bildes wird angepasst.

Stellen Sie eine Matrix auf, die diese Formatänderung beschreibt und leiten Sie die Umkehrmatrix (von „4:3“ nach „16:9“) her.

7 Punkte

Durch einen Fehler in der Autokorrektur wird das Beamerbild gestört. Die Erzeugung des gestörten Bildes lässt sich durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & -\tan(15^\circ) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschreiben.

2.3 Zeichnen Sie das sich durch diese Störung aus den Punkten B_1 bis B_4 ergebende Bild und deuten Sie die durch M beschriebene Störung.

8 Punkte

- 2.4 Mit Hilfe eines Softwareupdates kann dieser Fehler wieder rückgängig gemacht werden.

Bestimmen Sie eine Matrix M_1 , die diese Fehlerkorrektur beschreibt.

4 Punkte

- 2.5 Ermitteln Sie alle Punkte, welche bei der durch M beschriebenen Störung nicht verändert werden.

7 Punkte

Jetzt soll die Positionierung des Beamers unter der Decke erfolgen. Damit wird das Bild nicht mehr zentral ausgestrahlt. Man spricht von einer „Offset-Abbildung“ (s. Abb. 3).

Dadurch muss die Bildprojektion auf die Leinwand durch den Beamer angepasst werden.

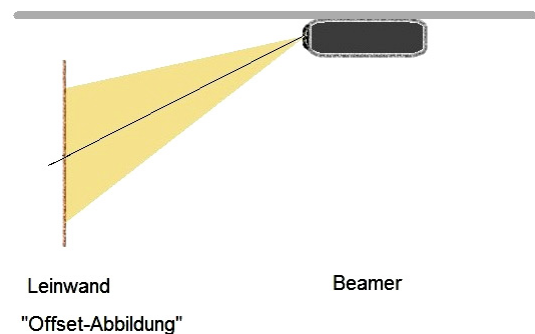


Abbildung 3: an die Decke montierter Beamer – seitlich betrachtet

- 2.6 Die Offset-Abbildung wird beschrieben durch:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(180^\circ) & -\sin(180^\circ) \\ \sin(180^\circ) & \cos(180^\circ) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

Die Matrix M beschreibe weiterhin die Bildstörung durch einen Fehler in der Autokorrektur. Die Störung durch die Matrix M kann vor oder nach der Bildprojektion entstehen.

Berechnen Sie für die Bildpunkte B_1 bis B_4 die Störung des projizierten Bildes und die Projektion des gestörten Bildes und erläutern Sie den Unterschied.

7 Punkte

- 2.7

Begründen Sie, dass die Abbildung $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & T_x \\ 0 & -1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Drehung um

180° und eine Verschiebung um T_x in x-Richtung und um T_y in y-Richtung beschreibt.

6 Punkte

Aufgabe 2 gesamt: 45 Punkte

Aufgabe 3

Patchkabel werden zur Verbindung von Computern und anderen Netzwerk-Komponenten benötigt.

In einem Kabel werden die acht farblich gekennzeichneten Adern paarweise („twisted pair“) miteinander verdreht.

Als Farben stehen für die Adern die vier Vollfarben blau, orange, braun und grün sowie die vier gestreiften Varianten weiß-blau, weiß-orange, weiß-braun und weiß-grün zur Verfügung.

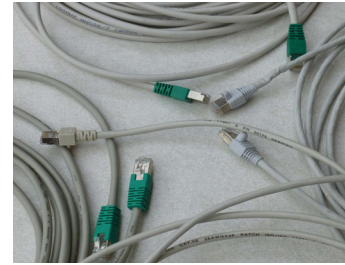


Abb.: Patchkabel

- 3.1 Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die Farben auf die Adern zu verteilen, wenn eine Vollfarbe mit einer gestreiften Variante zu einem Paar kombiniert werden soll.

5 Punkte

Ein wichtiges Gütekriterium für solche Kabel ist die mindestens erreichbare Übertragungsfrequenz. Zur Einstufung in die Qualitätskategorie „Cat. 5“ ist es erforderlich, eine Grenzfrequenz von 100 MHz einzuhalten.

Die Patchkabel werden auf zwei Produktionsanlagen hergestellt. Die Fertigung auf der Anlage A liefert fehlerhafte Kabel mit einer Quote von 5 %. Die auf der Anlage B produzierten Kabel liefern nur zu 3 % eine zu geringe Übertragungsfrequenz. Auf der Anlage A werden 25 % der Gesamtproduktion hergestellt.

- 3.2 Bestätigen Sie, dass für die Gesamtproduktion die Wahrscheinlichkeit 0,035 beträgt, dass ein Kabel die Grenzfrequenz nicht einhält.

3 Punkte

Unabhängig von dem Fehler, die Grenzfrequenz nicht einzuhalten, kann bei der Gesamtproduktion mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,07 ein Fehler bei der Adernbelegung im Stecker auftreten.

- 3.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:
 E_1 : ein Kabel weist genau einen der beiden Fehler auf
 E_2 : ein Kabel ist fehlerfrei.

4 Punkte

Zur Kontrolle der Kabel auf Fehler bei der Adernbelegung soll eine automatische optische Überprüfung erfolgen. Dabei werden Fehler der Adernbelegung mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,96 entdeckt, jedoch werden auch mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,04 korrekte Adernbelegungen als fehlerhaft angezeigt.

- 3.4 Stellen Sie den Sachverhalt in zwei verschiedenen Baumdiagrammen dar und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein als fehlerhaft gekennzeichnetes Kabel tatsächlich einen Fehler der Adernbelegung aufweist.

10 Punkte



Im Folgenden sollen die Fehler bedingt durch Nichteinhalten der Grenzfrequenz untersucht werden.

- 3.5 Der laufenden Produktion von Anlage A (Fehlerquote 5 %) werden 30 Kabel entnommen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse:

E_3 : genau ein Kabel ist fehlerhaft

E_4 : mindestens zwei aber höchstens fünf Kabel sind fehlerhaft.

6 Punkte

Die Kabel werden unmittelbar an den Fertigungsanlagen zu 250 Stück kartoniert, so dass in jedem Karton nur Kabel von einer Fertigungsanlage verpackt sind. Die Kartons werden nicht etikettiert, von welcher Anlage die enthaltene Ware stammt.

- 3.6 Es ist bekannt, dass ein Karton mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,25 auf Anlage A (Fehlerquote 5 %) und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,75 auf Anlage B (Fehlerquote 3 %) produziert wurde.

Ein besonders kritischer Kunde möchte sicherstellen, dass er nur Ware von der Anlage B erhält. Dazu werden alle Kabel in einem Karton überprüft und es wird in Abhängigkeit von k wie folgt entschieden:

Finden sich höchstens k fehlerhafte Kabel im Karton, wird der Karton mit „von Anlage B“ etikettiert, bei mehr als k fehlerhaften Kabeln wird der Karton mit „von Anlage A“ etikettiert.

Leiten Sie ein Verfahren her, mit dem Sie in Abhängigkeit von k die Wahrscheinlichkeit für eine korrekte Beschriftung des Kartons bestimmen und weisen Sie nach, für welchen Wert von k diese Wahrscheinlichkeit möglichst groß wird.

9 Punkte

Für die Fertigung von Patchkabeln mit Soll-Länge 1 Meter werden die Rohkabel sofort auf Maß geschnitten. Der Längenzuschnitt der Kabel erfolgt mit einem Erwartungswert von $\mu = 1,032 \text{ m}$ und einer Standardabweichung von $\sigma = 0,02 \text{ m}$. Gehen Sie von einer Normalverteilung der Längenzuschnitte aus.

- 3.7 Ermitteln Sie den symmetrischen Längenbereich um den Erwartungswert, in dem die Kabel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,97 gefertigt werden.

4 Punkte

- 3.8 Ermitteln Sie, mit welchem prozentualen Anteil von Leitungen die eine Länge von höchstens 1 Meter besitzen, gerechnet werden muss.

4 Punkte

Aufgabe 3 gesamt: 45 Punkte



Materialgrundlage (Quellenangaben, Fundstellen)

Alle Abbildungen und Fotos: eigene Anfertigungen

Zugelassene Hilfsmittel

In der Abiturprüfung sind für den Aufgabensatz mit CAS **zugelassen**:

- Gedruckte Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten. die Formelsammlungen sind vor Ausgabe an die Schülerinnen und Schüler zu überprüfen.
- wissenschaftlicher Taschenrechner,
- Computeralgebrasysteme und / oder Tabellenkalkulation, um:
 - algebraische Ausdrücke zu vereinfachen und zu vergleichen
 - algebraische Gleichungen zu lösen
 - lineare Gleichungssysteme zu lösen und Matrizenberechnung durchzuführen
 - Funktionen algebraisch zu differenzieren und zu integrieren
 - Funktionen und Daten zweidimensional graphisch darzustellen
 - Werte der Binomialverteilung zu bestimmen

In der Abiturprüfung sind für den Aufgabensatz mit CAS **nicht zugelassen**:

- Schulinterne eigene Druckwerke,
- mathematische Fachbücher und mathematische Lexika

Punktevergabe und Arbeitszeit

Inhaltliche Leistung (Verstehensleistung)	135 Punkte
Darstellungsleistung	15 Punkte
Gesamtpunktzahl	150 Punkte

Bearbeitungszeit	255 Minuten
------------------	-------------