



**Zentrale Abiturprüfung 2013  
Haupttermin  
16.04.2013**

**Weiterer Leistungskurs  
Mathematik  
(mit CAS)**

**Fachbereich Technik**

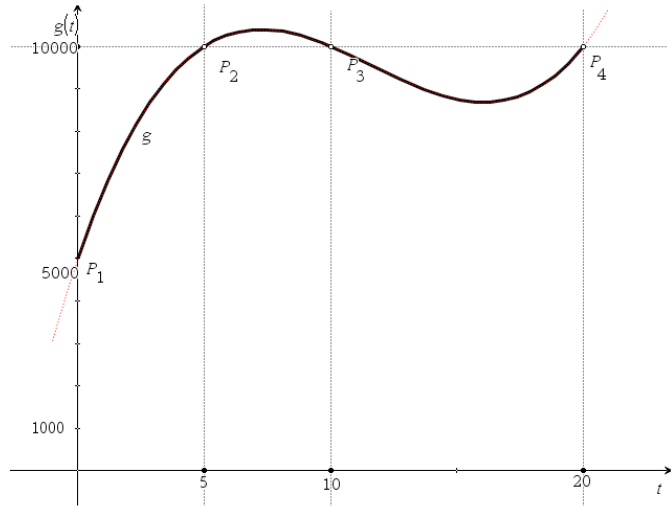
**Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler**

## Aufgabenstellung

### Aufgabe 1

In einem Betrieb werden verschiedene Kugellager zunächst als Prototypen hergestellt. Bevor die Serienproduktion eines Kugellagers neuen Typs beginnt, werden ausführliche Belastungstests durchgeführt.

Ein wesentliches Kriterium ist die Drehzahl eines Kugellagers. Diese wird in der Einheit 1/s angegeben. Die Zeit wird in Sekunden angegeben.



Ein erster Test beginnt mit einer Drehzahl von 5000 und durchläuft während der folgenden 20 Sekunden ein Testprogramm, bei dem nach 5, 10 und 20 Sekunden eine Drehzahl von 10 000 erreicht wird.

- 1.1 Ermitteln Sie aus diesen Informationen eine ganzrationale Funktion  $g$  möglichst geringen Grades, die den Verlauf der Drehzahl mit den oben angegebenen Werten in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

**8 Punkte**

Verwenden Sie im Folgenden die Funktion  $g$  mit der Gleichung

$$g(t) = 5t^3 - 175t^2 + 1750t + 5000, \quad t \in \mathbb{R}$$

- 1.2 Bestimmen Sie die höchste Drehzahl des Lagers während der Dauer des Tests.

**6 Punkte**

- 1.3 Berechnen Sie die Zeitpunkte während des Tests, an denen die Drehzahl am stärksten zu- bzw. abnimmt.

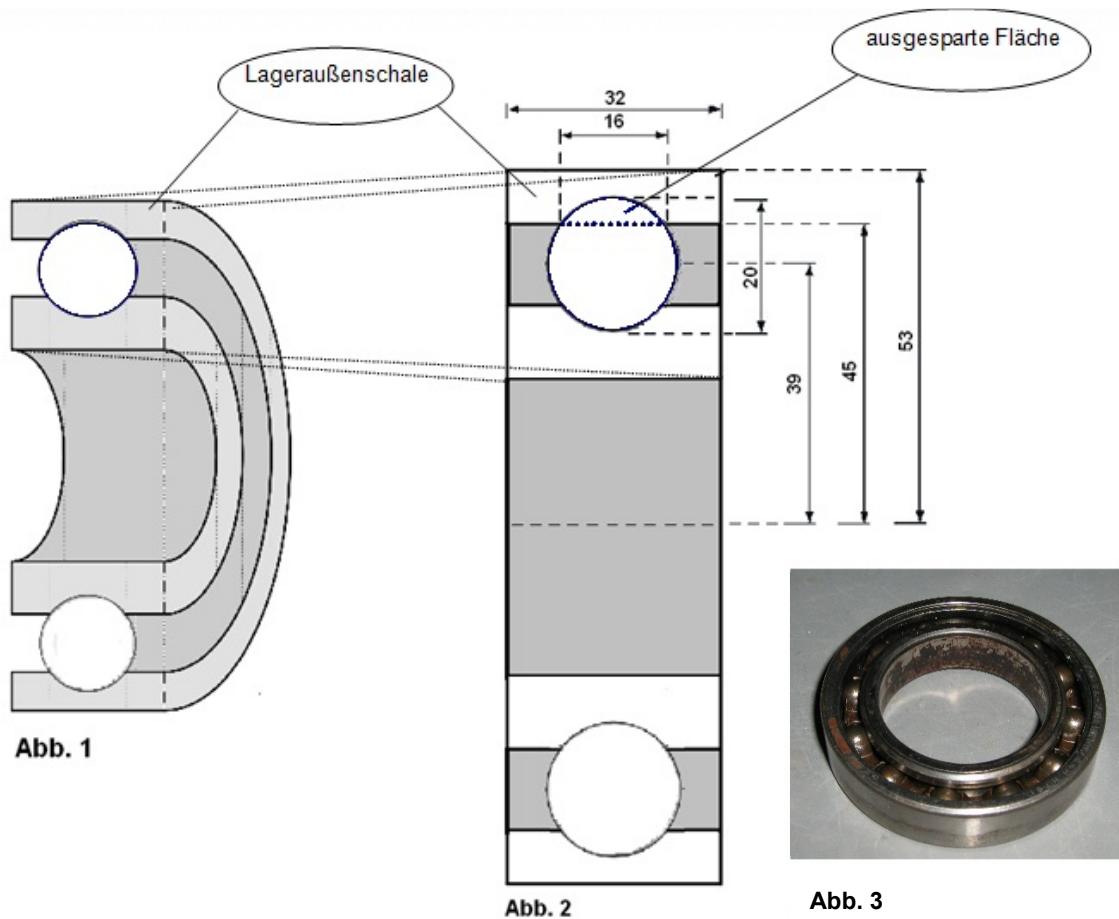
**6 Punkte**

- 1.4 Bestimmen Sie die Gesamtzahl der Umdrehungen im Verlauf des Messprogramms.

**6 Punkte**

Zu den angefertigten Prototypen gehört ein neues Radiallager, dessen Kugeln mittig zwischen einer inneren und einer äußeren Lagerschale geführt werden. Die Führung erfolgt durch kreisbogenförmige Aussparungen in den Lagerschalen. Das Prinzip ist in der Abb. 1 skizziert.

Als Grundlage für die Kalkulation wird beispielhaft das Volumen der Lageraußenschale benötigt. In der Abbildung 2 ist das frontale Schnittbild des Kugellagers mit den Maßen in mm angegeben.



- 1.5 Die Gleichung für einen Halbkreis mit Radius  $r$  lautet  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ . Zeigen Sie damit, dass die in der Lageraußenschale ausgesparte Querschnittsfläche (siehe Abb. 2) 44,73 mm<sup>2</sup> beträgt.

**6 Punkte**

- 1.6 Leiten Sie durch eine Zerlegung der rotierenden Fläche in geeignete Teilflächen eine Formel zur Berechnung des Volumens der Lageraußenschale her und weisen Sie nach, dass dieses Volumen etwa 65 700 mm<sup>3</sup> beträgt.

**13 Punkte**

**Aufgabe 1 gesamt: 45 Punkte**



## Aufgabe 2

Für einen Bildschirmschoner soll ein Particle-Systems-Effekt zum Einsatz kommen. Particle Systems bestehen aus einzelnen geometrischen Objekten, die sich verformen und auf bestimmten Bahnen bewegen.

Die Firma, die den Bildschirmschoner bestellt hat, wünscht sich immer kleiner werdende Quadrate, die sich spiralförmig einem Punkt nähern.

Die Ecken eines Quadrats liegen am Anfang bei den Punkten A ( -1 | -1 ), B ( 1 | -1 ), C ( 1 | 1 ) und D ( -1 | 1 ). Ein Teilschritt der Bildveränderung wird durch die Abbildung  $f$  mit

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

festgelegt.

- 2.1 Berechnen Sie jeweils die Koordinaten der Eckpunkte des Quadrates nach einmaliger und zweimaliger Anwendung der Abbildung  $f$  sowie die jeweiligen Flächeninhalte der entstehenden Quadrate.

Stellen Sie die drei Quadrate in einem Koordinatensystem grafisch dar.

**14 Punkte**

- 2.2 Begründen Sie, dass die Matrix  $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$  eine Drehung um den Ursprung entgegen dem Uhrzeigersinn um den Winkel  $\varphi$  bewirkt, indem Sie die Punkte  $E_1( 1 | 0 )$  und  $E_2( 0 | 1 )$  mit  $R$  abbilden.

**5 Punkte**

- 2.3 Zeigen Sie, dass die durch  $f$  gegebene Abbildung zerlegt werden kann in:

- eine Drehung um  $45^\circ$  im Uhrzeigersinn um den Ursprung,

- eine Stauchung mit dem Faktor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  und

- abschließend eine Verschiebung um  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

**8 Punkte**

- 2.4 Begründen Sie, dass bei vielfacher Anwendung der Abbildung  $f$  das Quadrat irgendwann nicht mehr zu erkennen ist.

**4 Punkte**

- 2.5 Leiten Sie durch Lösen der Gleichung  $f(\vec{x}) = \vec{x}$  her, dass F ( 0 | -2 ) der einzige Punkt ist, der bei der Anwendung von  $f$  unverändert bleibt.

**6 Punkte**



- 2.6 Bei n-maliger Anwendung von  $f$  kann die Wirkung auf einen beliebigen Punkt, dessen Lage im Koordinatensystem durch den Vektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  angegeben wird, wie folgt beschrieben werden:

$$\vec{x}'_{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n \cdot \vec{x} + \left( E - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)^{-1} \cdot \left( E - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dabei ist E die Einheitsmatrix.  $M^{-1}$  bezeichnet die inverse Matrix zu  $M$ .

Zeigen Sie, dass sich das Quadrat immer näher auf  $F(0 | -2)$  zubewegt.

**3 Punkte**

- 2.7 Der Bildschirmschoner soll um eine Funktionalität erweitert werden, so dass die Bewegungen der Quadrate umgekehrt zu der durch  $f$  beschriebenen Abbildung verlaufen, d.h. die Quadrate werden größer und drehen sich in die andere Richtung.  
Leiten Sie die Funktionsvorschrift der zu  $f$  inversen Abbildung her.

**5 Punkte**

**Aufgabe 2 gesamt: 45 Punkte**



### Aufgabe 3

Beim Zusammenbau und Konfigurieren eines PCs kann es zu vielfältigen Fehlern kommen. Daher wird jeder PC im Laufe der Produktion kurz auf seine Funktionstüchtigkeit getestet.

Ein Hersteller untersucht die PCs anhand von drei Kriterien:

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,12 bestehen die PCs den Geschwindigkeitstest der verwendeten Bauteile nicht.

Bei der Überprüfung der Soundkarte treten mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,15 Probleme auf.

Die Prüfung der HDMI-Schnittstelle zeigt Mängel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,07.

Die Fehlerursachen sind als unabhängig voneinander anzusehen.

3.1 Zeichnen Sie ein passendes Baumdiagramm und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:

$E_1$ : Bei der Untersuchung der drei Fehlerquellen wird kein Fehler entdeckt.

$E_2$ : Die Untersuchung der drei Fehlerquellen ergibt ein Problem entweder nur bei der Soundkarte oder nur bei der Geschwindigkeit.

$E_3$ : Bei der Untersuchung der drei Fehlerquellen werden mindestens 2 Fehlerquellen entdeckt.

**9 Punkte**

Der Austausch defekter HDMI-Schnittstellen ist besonders zeitaufwändig. Daher soll zusätzlich eine Software verwendet werden, die eine defekte HDMI-Schnittstelle mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 als solche erkennt. Die Software zeigt allerdings auch einwandfreie HDMI-Schnittstellen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,01 als defekt an.

3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine HDMI-Schnittstelle tatsächlich defekt ist, wenn die Software einen Defekt anzeigt, und beurteilen Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

**9 Punkte**

Ein anderer PC-Hersteller geht aufgrund einer langfristigen Kontrolle seiner Produktion von einer Ausschussquote von 0,1 aus.

3.3 Aus einer Serie wird nacheinander zufällig eine beliebige Anzahl von PCs entnommen.

Berechnen Sie, wie viele PCs mindestens entnommen werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,95 mindestens einen defekten PC zu finden.

**7 Punkte**



- 3.4 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Lieferung mit 50 PCs höchstens ein defekter PC vorhanden ist.

**5 Punkte**

Vor der Auslieferung einer Serie von PCs führt eine Firma zur Qualitätssicherung eine Endkontrolle durch. Ein Mitarbeiter entnimmt zufällig solange PCs und testet diese, bis er entweder den vierten funktionierenden PC oder den zweiten defekten PC gefunden hat. Im ersten Fall wird die Serie zur Auslieferung freigegeben, andernfalls wird die Produktionsserie komplett geprüft. Die Wahrscheinlichkeit für einen defekten PC sei  $p$ .

- 3.5 Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f$  für die Überprüfung der kompletten Produktionsserie durch die Funktionsvorschrift

$$f(p) = 10p^2 - 20p^3 + 15p^4 - 4p^5, \quad p \in [0;1]$$

gegeben ist.

**9 Punkte**

- 3.6 Leiten Sie her, wie groß die Wahrscheinlichkeit  $p$  maximal sein darf, damit die Wahrscheinlichkeit für die Prüfung der kompletten Serie maximal 0,1 beträgt.

**6 Punkte**

**Aufgabe 3 gesamt: 45 Punkte**



## Materialgrundlage (Quellenangaben, Fundstellen)

Abbildungen in Aufgabe 1: Eigene Anfertigungen

## Zugelassene Hilfsmittel

In der Abiturprüfung sind für den Aufgabensatz mit CAS **zugelassen**:

- Gedruckte Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten. die Formelsammlungen sind vor Ausgabe an die Schülerinnen und Schüler zu überprüfen.
- wissenschaftlicher Taschenrechner,
- Computeralgebrasysteme und / oder Tabellenkalkulation, um:
  - algebraische Ausdrücke zu vereinfachen und zu vergleichen
  - algebraische Gleichungen zu lösen
  - lineare Gleichungssysteme zu lösen und Matrizenberechnung durchzuführen
  - Funktionen algebraisch zu differenzieren und zu integrieren
  - Funktionen und Daten zweidimensional graphisch darzustellen
  - Werte der Binomialverteilung zu bestimmen

In der Abiturprüfung sind für den Aufgabensatz mit CAS **nicht zugelassen**:

- Schulinterne eigene Druckwerke,
- mathematische Fachbücher und mathematische Lexika

## Punktevergabe und Arbeitszeit

Inhaltliche Leistung (Verstehensleistung)	135 Punkte
Darstellungsleistung	15 Punkte
Gesamtpunktzahl	150 Punkte

Bearbeitungszeit	255 Minuten
------------------	-------------