



**Zentrale Abiturprüfung 2012
Haupttermin
24.04.2012**

**Weiterer Leistungskurs
Mathematik**

Fachbereich Technik

Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler

Aufgabe 1:

Beschreibung der Ausgangssituation

Für eine große Filmproduktion bekommen die Filmtechniker den Auftrag ein Dolly-System am Filmset aufzubauen. Dieses Dolly-System ist ein Schienensystem, auf dem eine Kamera für Kamerafahrten installiert wird.



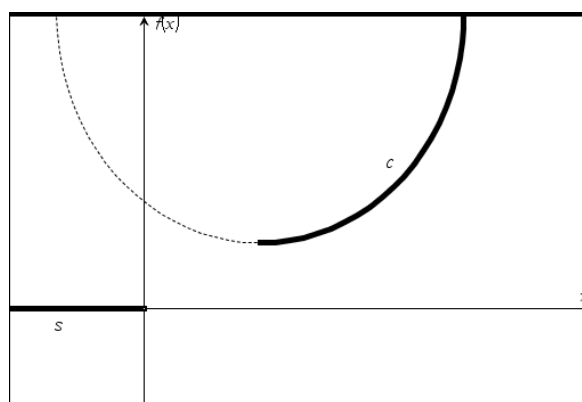
Quelle:
[http://de.wikipedia.org/wiki/Dolly_\(Kamerawagen\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Dolly_(Kamerawagen))

Aus vorhergehenden Einstellungen ist ein kreisförmiges Dolly-System aufgebaut, welches durch die Funktion c mit

$$c(x) = 9 - \sqrt{49 - (x - 4)^2}, \quad x \in [4; 11]$$

modelliert werden kann. Auch entlang der negativen x -Achse bis zum Ursprung gibt es aufgebautes Schienenmaterial, beschrieben durch die Funktion s mit

$$s(x) = 0, \quad x \leq 0.$$



Für die Kamera ist eine *durchgängige, glatte und ruckfreie* Fahrt auf dem Schienensystem gefordert. Dies ist gegeben, wenn der Übergang zweier Kurvenstücke ohne einen Krümmungssprung vorliegt, das heißt, wenn an der Übergangsstelle der Funktionswert und die Werte der ersten beiden Ableitungen gleich sind.

Der Schienenverlauf, welcher Kreis und Gerade verbindet, soll zunächst mit Funktionstermen im Koordinatensystem modelliert werden. Diese beschreiben die jeweiligen Koordinaten (in Meter) der mittig auf dem Schienensystem montierten Kamera.

Aufgabenstellung

Punkte

- 1.1 Der Verlauf der Schienen zwischen dem Ursprung und dem Punkt $P(4 | 2)$ (festgelegter Punkt für eine Nahaufnahme) soll durch eine ganzrationale Funktion f möglichst geringen Grades modelliert werden. Dabei sollen die Übergänge durchgängig, glatt und ruckfrei erfolgen.
Bestimmen Sie die Bedingungen für das Aufstellen dieser Funktion und ermitteln Sie die Funktionsgleichung.

10 P



Rechnen Sie im Folgenden mit dem Kontrollergebnis:

$$f(x) = \frac{23}{1792}x^5 - \frac{113}{896}x^4 + \frac{37}{112}x^3 \text{ mit } x \in [0; 4]$$

- 1.2 Weisen Sie rechnerisch nach, dass der durch die Funktion f modellierte Schienenverlauf keine einheitliche Krümmungsrichtung aufweist. 5 P

Der Regisseur verlangt, dass die Kamera ruhiger und näher an der Filmhandlung fahren soll, die auf der positiven x-Achse spielt. Er legt statt $x_p = 4$ den neuen

Übergang im Koordinatensystem an der Stelle $x_{neu} = \frac{48}{5}$ fest.

- 1.3 Erläutern Sie, dass die ganzrationale Funktion g mit 6 P

$$g(x) = \frac{85\,625}{334\,430\,208}x^5 - \frac{71\,125}{13\,934\,592}x^4 + \frac{4\,475}{145\,152}x^3, \quad x \in \left[0; \frac{48}{5}\right]$$

eine *durchgängige, glatte* und *ruckfreie* Fahrt an den beiden Übergangsstellen ermöglicht.

- 1.4 Der Regisseur hat sich für den Schienenverlauf entlang der Funktion g entschieden. 4 P
Skizzieren Sie die beiden Funktionen c und g in ein geeignetes Koordinatensystem.

Neben den Übergangsbedingungen muss die Dolly-Schiene noch weitere Kriterien erfüllen. Die maximal mögliche Geschwindigkeit der Kamerafahrt muss berücksichtigt werden, außerdem soll so wenig wie möglich des teuren Schienenmaterials gemietet werden.

- 1.5 Die Gesamtlänge des verwendeten Schienenmaterials darf aus Kostengründen 16 m nicht überschreiten. 10 P

Die Bogenlänge l (Länge einer Kurve im Intervall $[a; b]$) ist gegeben

$$\text{durch } l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Weisen Sie nach, dass für den Übergangsbogen g zusammen mit dem verwendeten Teil des kreisförmigen Dolly-Systems c die Bogenlänge diesen Wert nicht überschreitet.

Hinweis: Aus Rechenzeitgründen kann es hilfreich sein, die Berechnung schrittweise oder numerisch durchzuführen.



1.6 Filmtechniker benutzen für die maximale Geschwindigkeit v_{\max} die 10 P

Faustformel: $v_{\max} = \sqrt{0,65 \cdot \frac{1}{k_{\max}}}$ (in $\frac{m}{s}$), wobei k_{\max} die betragsmäßig
maximale Krümmung ist.

Die Krümmung k für eine Funktion h mit der Funktionsgleichung $h(x)$

wird durch folgenden Funktionsterm angegeben: $k(x) = \frac{h''(x)}{\left(1 + (h'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

Leiten Sie her, dass für den Übergangsbogen g zusammen mit dem
Kreisstück von c im Intervall $[0;11[$ eine Höchstgeschwindigkeit von

etwa $2 \frac{m}{s}$ möglich ist.

Gesamtpunkte Aufgabe 1 45

Aufgabe 2:

Beschreibung der Ausgangssituation:



Am Wanderweg Rothaarsteig gibt es den Waldskulpturenweg, an dem übergroße künstlerische Objekte aufgestellt sind. Ein Künstler plant, dort einen Siegerländer Wetterstein an einem Dreibein zu installieren. Um Vorüberlegungen zu treffen, wird das Projekt im dreidimensionalen Koordinatensystem modelliert. Das Gelände fällt leicht ab; die Fußpunkte der drei Stützen des Dreibeins befinden sich an den Stellen $A(-1 | -2 | 0)$, $B(1 | 3 | -1)$, $C(-3 | 2 | 1)$.

Die Stützen treffen sich im Punkt $S(-1 | 1 | \frac{33}{10})$ (alle Einheiten in Metern). Dort ist der kugelförmige Stein (Durchmesser $d = 0,3$ m) an einer 1 m langen Kette aufgehängt.

Aufgabenstellung

Punkte

- | | | |
|-----|---|------|
| 2.1 | Skizzieren Sie das Projekt in einem dreidimensionalen Koordinatensystem.

Bei diesem Koordinatensystem soll die x_1 -Achse um den Faktor $\sqrt{2}$ verkürzt sein und aus der Blattebene nach vorne zeigen; die x_2 -Achse zeigt nach rechts und die x_3 -Achse nach oben. | 4 P |
| 2.2 | Um die Materialkosten zu kalkulieren, sind unter anderem die Längen der Stützen erforderlich. Aufgrund des schrägen Geländes sind diese verschieden.
Bestimmen Sie die Längen der drei Stützen. | 6 P |
| 2.3 | Der Künstler möchte einen ebenen Spiegel unterhalb der Kugel installieren. Zunächst plant er, den Spiegel an jeder Stütze auf $\frac{2}{3}$ der Höhe vom Fußpunkt aus betrachtet zu befestigen.
Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene auf, die die Spiegeloberfläche E_1 beschreibt.
Zeigen Sie, dass eine solche Planung für die Funktionstüchtigkeit des Wettersteins nicht sinnvoll ist. | 11 P |



- 2.4 Weil die bisher geplante Befestigung nicht sinnvoll ist, soll der Spiegel anders befestigt werden. An den Stützen \overrightarrow{AS} und \overrightarrow{CS} soll er in den Punkten $P\left(-1 \mid -\frac{1}{2} \mid \frac{33}{20}\right)$ bzw. $Q\left(-2 \mid \frac{3}{2} \mid \frac{43}{20}\right)$ verankert werden; die Befestigung am Stab \overrightarrow{BS} soll im Punkt R erfolgen, der durch $R\left(1-2r \mid 3-2r \mid -1+\frac{43}{10}r\right)$ mit $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ gegeben ist.
- Leiten Sie einen Wert für den Parameter r her, so dass der Abstand der Spiegeloberfläche vom Mittelpunkt der Steinkugel 0,5 m beträgt. Bestimmen Sie damit die Koordinaten des Punktes R.

Benutzen Sie im Folgenden als Gleichung für die Ebene der Spiegeloberfläche das gerundete Kontrollergebnis:

$$E_2 : -3,1155 \cdot x_1 - 0,2975 \cdot x_2 - 5,0409 \cdot x_3 = -5,0533$$

- 2.5 Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Ebene E_2 gegenüber der $x_1 - x_2$ -Ebene. 4 P
- 2.6 Zur Vermeidung einer zu starken Pendelbewegung soll der Stein am Boden verankert werden. Dazu ist eine Bohrung in dem Spiegel erforderlich, durch die eine Kette lotrecht zum Boden geführt wird. Berechnen Sie die Koordinaten des Lochmittelpunktes. 8 P

Gesamtpunkte Aufgabe 2 45



Aufgabe 3:

Beschreibung der Ausgangssituation

Ein Smartphone ist ein Mobiltelefon, das mehr Computerfunktionalität als ein herkömmliches fortschrittliches Mobiltelefon zur Verfügung stellt. Aktuelle Smartphones können über zusätzliche Programme (sogenannte Apps) vom Anwender individuell mit neuen Funktionen aufgerüstet werden.

Aufgabenstellung

Punkte

- | | | |
|-----|--|-----|
| 3.1 | Bei einem Smartphone gibt es einen Bildschirm, auf dem der Benutzer individuell die Apps platzieren kann. Auf dem Smartphone stehen insgesamt 30 Apps zur Verfügung. Es können bis zu 9 Apps in einem festen Raster (mit 9 Positionen) abgelegt werden. Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, 9 verschiedene Apps auszuwählen und in unterschiedlicher Reihenfolge auf dem Bildschirm zu platzieren. | 4 P |
| 3.2 | Zwei der 30 zur Verfügung stehenden Apps hat der Benutzer bereits an Positionen 1 und 2 auf dem Bildschirm abgelegt. Die restlichen Positionen sollen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge mit verschiedenen Apps aufgefüllt werden. Bestimmen Sie die Anzahl dieser Möglichkeiten. | 4 P |

Bei dem komplexen Herstellungsprozess von Smartphones kommt es oft zu Produktionsfehlern. Insbesondere ist das Display bei der Herstellung sehr anfällig für Pixelfehler.

Aus der laufenden Produktion wird eine Stichprobe von 600 Smartphones gezogen. Erfahrungsgemäß sind die Displays mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,01 defekt. Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Smartphones mit defektem Display an.

- | | | |
|-----|--|-----|
| 3.3 | Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
E_1 : In der Stichprobe sind genau 10 fehlerhafte Displays.
E_2 : Mindestens 10 Displays aus der Stichprobe sind fehlerhaft. | 6 P |
| 3.4 | Bestimmen Sie das kleinste symmetrische Intervall um den Erwartungswert von X , in dem die Anzahl der fehlerhaften Displays mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,85 liegt. | 4 P |



- 3.5 Ein Mitarbeiter möchte wissen, wie viele Smartphones der Produktion mindestens entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 0,01 weniger als drei fehlerhafte Displays dabei sind. 10 P
Weisen Sie nach, dass sich zur Beantwortung seiner Frage folgende Ungleichung ergibt:

$$\left(\frac{99}{100}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{197}{19602}n + \frac{1}{19602}n^2\right) \leq 0,01$$

und leiten Sie daraus den Umfang n der Stichprobe her.

Ein bekanntes Problem bei der Verwendung von Smartphones ist die relativ geringe Akkulaufzeit.

Eine Firma hat sich auf die Herstellung von Hochleistungsakkus spezialisiert. Erfahrungsgemäß sind diese Akkus mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,04 defekt. Von der Endkontrolle weiß man, dass defekte Akkus mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,97 als solche erkannt werden. Jedoch werden auch Akkus ohne Mängel mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 fälschlicherweise als defekt eingestuft.

- 3.6 Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm oder in einer Vierfeldertafel dar. 9 P
Ermitteln Sie daraus die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Endkontrolle richtig entscheidet.
- 3.7 Zeigen Sie zunächst, dass für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Akku tatsächlich defekt ist, wenn er bei der Endkontrolle als defekt eingestuft wird, gilt: 8 P

$$P_{\text{ist als defekt eingestuft}}(\text{ist tatsächlich defekt}) \approx 0,45$$

Die Firma möchte diese Wahrscheinlichkeit auf

$$P_{\text{ist als defekt eingestuft}}(\text{ist tatsächlich defekt}) \geq 0,8 \text{ erhöhen.}$$

Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich erhöhen, indem man die Wahrscheinlichkeit q , dass Akkus ohne Mängel fälschlicherweise als defekt eingestuft werden (von vorher 0,05), verringert.

Leiten Sie her, wie groß diese Wahrscheinlichkeit q höchstens sein darf.

Gesamtpunkte Aufgabe 3 45



Materialgrundlage (Quellenangaben, Fundstellen)

Bild Aufgabe 1:

[http://de.wikipedia.org/wiki/Dolly_\(Kamerawagen\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Dolly_(Kamerawagen)) (Zugriff: 22.02.2012)

Bilder Aufgabe 2:

Anfertigung der einreichenden Lehrkraft/Schule

Zugelassene Hilfsmittel

Für den Aufgabensatz 2 (mit CAS) sind in der Abiturprüfung 2012 zugelassen:

- Gedruckte Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten (Die Formelsammlungen sind vor Ausgabe an die Schülerinnen und Schüler zu überprüfen.)
- Wissenschaftliche Taschenrechner
- Computeralgebrasysteme und/oder Tabellenkalkulation.

Für den Aufgabensatz 2 (mit CAS) sind in der Abiturprüfung 2012 **nicht** zugelassen:

- Schulinterne eigene Druckwerke, mathematische Fachbücher und mathematische Lexika

Punktevergabe und Arbeitszeit

Inhaltliche Leistung (Verstehensleistung)	135 Punkte
Darstellungsleistung	15 Punkte
Gesamtpunktzahl	150 Punkte

Bearbeitungszeit	255 Minuten
------------------	-------------