



**BERUFSKOLLEG**  
Berufliches Gymnasium

# **Zentrale Abiturprüfung 2011**

## **Weiterer Leistungskurs**

### **Fach Mathematik**

**Fachbereich Technik**

Unterlagen für die Lehrkraft



## 1 Konstruktionsmerkmale der Aufgabe

Aufgaben	Aufgabenarten
Aufgabe 1	Lineare Algebra/Analytische Geometrie - Ballonfahrt
Aufgabe 2	Stochastik - Toleranzen von Bauteilen
Aufgabe 3	Analysis ohne CAS - Modellierung eines Bachlaufs
Aufgabe 4	Analysis mit CAS - Modellierung einer Riemenscheibe

## 2 Aufgabenstellung (vgl. Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler)

## 3 Materialgrundlage

Quelle des Bildes (Heißluftballon) in Aufgabe 1:

<http://view.stern.de/de/picture/Landschaft-Sonnenuntergang-Ballon-PICT0450-Schwarz-Natur-%26-Landschaft-363178.html>

Abbildungen Aufgabe 4:

vom Autor und der Aufgabenkommission erstellte Grafiken

## 4 Bezüge zu den Abiturvorgaben 2011

In den vier Aufgaben spiegeln sich die im Punkt 3.1 der „Vorgaben für die Abiturprüfung am Berufskolleg im Jahr 2011“ aufgeführten inhaltlichen Schwerpunkte wieder.

## 5 Zugelassene Hilfsmittel

- Für die Abiturprüfung 2011 sind zugelassen:
  - Gedruckte Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten. Die Formelsammlungen sind vor Ausgabe an die Schülerinnen und Schüler zu überprüfen.
  - Tabellierte kumulierte Binomialverteilung,
  - Nicht programmierbare wissenschaftliche Taschenrechner.
- In der Abiturprüfung 2011 sind **nicht** zugelassen:
  - Schulinterne eigene Druckwerke, mathematische Fachbücher und mathematische Lexika
  - Computeralgebrasysteme (außer für die alternative Aufgabe aus dem Sachgebiet Analysis (siehe Punkt 6)),
  - Taschenrechner, die über eines der folgenden Leistungsmerkmale verfügen:
    - Darstellen von Funktionsgraphen
    - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
    - Numerisches Integrieren oder Differenzieren
    - Rechnen mit Matrizen und Vektoren



- In der Abiturprüfung 2011 sind nur für die alternative Aufgabe aus dem Sachgebiet Analysis (siehe Punkt 6) Computeralgebrasysteme als weiteres erforderliches Hilfsmittel zugelassen.

Das eingesetzte CAS sollte mindestens folgende Funktionen umfassen

- Wertetabellen erstellen
- Algebraische Ausdrücke vereinfachen und vergleichen
- Algebraische Gleichungen lösen
- Lineare Gleichungssysteme lösen und Matrizenberechnung durchführen
- Funktionen algebraisch differenzieren und integrieren
- Funktionen und Daten zweidimensional graphisch darstellen

## 6 Hinweise zur Aufgabenauswahl durch die Lehrkraft / den Prüfling

In den weiteren Leistungskursen und in den Grundkursen im Fach Mathematik entscheidet die jeweilige Fachlehrerin / der jeweilige Fachlehrer unter Aufsicht der Schulleitung am Downloadtag, ob für alle Prüflinge ihres / seines Kurses die verbindliche Analysisaufgabe ohne Computeralgebrasystemeinsatz (Auswahlaufgabe ohne CAS) oder mit Computeralgebrasystemeinsatz (Auswahlaufgabe mit CAS) zur Verfügung gestellt wird.

Nach einer Auswahlzeit von drei Zeitstunden teilt die Fachlehrerin / der Fachlehrer der Schulleitung schriftlich die Entscheidung mit. Diese Entscheidung wird zu den Prüfungsakten genommen. Für die Prüflinge besteht keine Aufgabenauswahl. Sie erhalten keine zusätzliche Auswahlzeit.

Sollte sich die Fachlehrerin / der Fachlehrer für die Analysis-Aufgabe ohne CAS-Einsatz entscheiden, so können die drei Aufgaben in der festgelegten Bearbeitungszeit insgesamt in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden.

Sollte sich die Fachlehrerin / der Fachlehrer für die Analysis-Aufgabe mit CAS-Einsatz entscheiden, sind folgende Hinweise zu beachten:

- Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu Beginn der Bearbeitungszeit die drei zu bearbeitenden Aufgaben.
- Die Schülerinnen und Schüler geben individuell nach Bearbeitung die beiden Lösungen der Aufgaben zur Linearen Algebra / Analytischen Geometrie und Stochastik und ggf. Zahlentheorie ab. Im Gegenzug wird ihnen das Computeralgebrasystem zur Verfügung gestellt. Ein weiteres Bearbeiten der ersten zwei Aufgaben ist danach nicht mehr möglich. Die Abgabezeit für die Aufgaben 1 und 2 wird von der Fachlehrerin / dem Fachlehrer bzw. der aufsichtführenden Lehrkraft protokolliert.
- Für eine hinreichende Anzahl von Ersatzsystemen (PC's bzw. Handhelds) ist zu sorgen.
- Alle Systeme sind vor der Prüfung in den Urzustand zu versetzen. Zusätzliche Tools bzw. ergänzende Programme sind auf den Systemen nicht zulässig. Die Schule stellt sicher, dass keine Verbindung der Systeme untereinander sowie keine Verbindung der Systeme zum Internet vorhanden sind.
- Der Lösungsweg ist von den Schülerinnen und Schülern in der Reinschrifttextlich so zu dokumentieren, dass der Gedankengang der Problemlösung vollständig nachvollziehbar ist. Die Dokumentation ist integraler Bestandteil der Problemlösung und geht in die Bewertung der Prüfungsleistung ein.
- Wird der Computer zum Editieren von Aufgabenlösungen benutzt, muss der Prüfling zum Abschluss einen Computerausdruck seines Lösungstextes durch Unterschrift autorisieren. Die Erstellung des Computerausdrucks ist von der Schule innerhalb der Gesamtbearbeitungszeit so zu organisieren, dass beim Abgeben der Prüfungsarbeit der unterschriebene Ausdruck vorliegt. Nur der autorisierte Ausdruck ist Bestandteil der Prüfungsarbeit; die elektronische Version (Datei) kann nicht zur Korrektur oder Bewertung herangezogen werden.
- Die verwendete Technologie muss in den Prüfungsakten von der Fachlehrerin / dem Fachlehrer mit Angabe des verwendeten Computeralgebrasystems bzw. Handheld-Typs mit der Version bzw. Versionsnummer vermerkt werden.



## 7 Bearbeitungszeit / Auswahlzeit

<b>Bearbeitungszeit:</b>	255 Minuten
<b>zusätzliche Auswahlzeit:</b>	keine



## 8 Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

### Teilleistungen – Kriterien

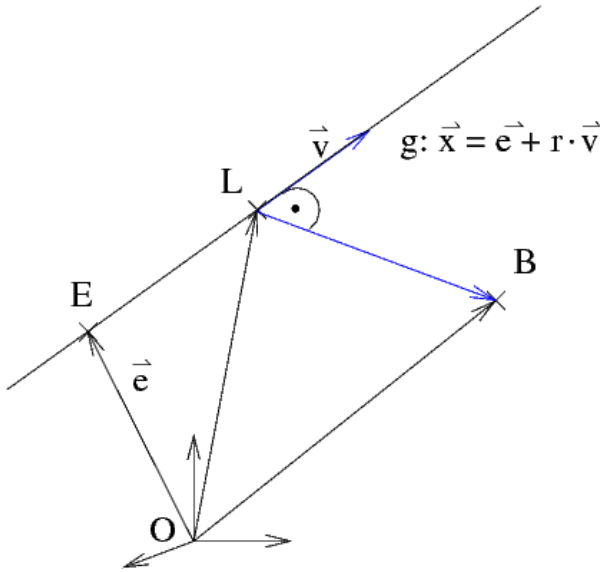
#### a) inhaltliche Leistung

#### Aufgabe 1

	Anforderungen	Maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1.1	<b>Bestimmen Sie vektoriell den Winkel ....</b>	
	<p>Bei gegebenen Koordinaten der Orte A und C und des Ballons B ergeben sich die Blickrichtungen des Ballonfahrers:</p> $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0,7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -0,3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ <p>Der Blickwinkel lässt sich über das Skalarprodukt ermitteln:</p> $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -0,5 \end{pmatrix} = 6 - 12 + 0,15 = -5,85$ $ \overrightarrow{BA}  = \sqrt{9 + 9 + 0,09} \approx 4,253$ $ \overrightarrow{BC}  = \sqrt{4 + 16 + 0,25} = 4,5$ $\cos \alpha = \frac{-5,85}{4,253 \cdot 4,5} \approx -0,306 \Rightarrow \alpha \approx 107,8^\circ$ <p>Der Blickwinkel beträgt etwa 108°.</p>	<b>5(I)</b>
1.2	<b>Beschreiben Sie die Landschaftsebene in Koordinatenschreibweise.</b>	
	<p>Die Ebene wird durch die Verbindungsvektoren zwischen den Orten A und C bzw. A und D aufgespannt.</p> $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -0,2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0,4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -0,3 \end{pmatrix}$ $\vec{n} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,3 \\ -0,5 \\ -29 \end{pmatrix}$ $\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2,3 \\ -0,5 \\ -29 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0,7 \end{pmatrix} = -23,6$	<b>3(I) 4(II)</b>



	Anforderungen	Maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	<p>Durch eine Multiplikation der resultierenden Gleichung mit -1 erhält man die Ebene in der folgenden Koordinatenform:</p> <p>E: <math>2,3 x_1 + 0,5 x_2 + 29 x_3 = 23,6</math></p>	
1.3	<b>Berechnen Sie den Winkel ...</b>	
	<p>Bei gegebenen Koordinaten des Ortes D und des Ballons B ergibt sich die Blickrichtung:</p> $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$ <p>Zur Berechnung des Winkels <math>\delta</math> zwischen Ebene und Ballon lässt sich das Skalarprodukt zwischen den Normalenvektor der Ebene und dem Vektor der Blickrichtung verwenden. Hier bietet es sich an den Vektor <math>\vec{n} = \begin{pmatrix} 2,3 \\ 0,5 \\ 29 \end{pmatrix}</math> zu verwenden.</p> $\vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 2,3 \\ 0,5 \\ 29 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0,6 \end{pmatrix} = 17,1$ $ \vec{n}  = \sqrt{2,3^2 + 0,5^2 + 29^2} \approx 29,095$ $ \overrightarrow{DB}  = \sqrt{1 + 16 + 0,36} \approx 4,167$ $\cos \varphi \approx \frac{17,1}{29,095 \cdot 4,167} \approx 0,141 \Rightarrow \varphi \approx 81,9^\circ \Rightarrow \delta \approx 8,1^\circ$ <p>Der Ballon wird vom Ort D aus unter einem Winkel <math>\delta = 8,1^\circ</math> gesehen.</p>	<p><b>2(I)</b> <b>4(II)</b></p>

	Anforderungen	Maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1.4	Berechnen Sie, in welcher Höhe der Ballon ... fliegt.	
	<p>Aus der Ebenengleichung und der Position des Ballons in der <math>x_1, x_2</math> – Ebene kann die Höhe der Ebene an der Ballonposition über NN bestimmt werden.</p> <p>Position des Ballons in der <math>x_1, x_2</math> – Ebene: B( 4 5)</p> $2,3 \cdot 4 + 0,5 \cdot 5 + 29 \cdot x_3 = 23,6$ $x_3 = \frac{23,6 - 9,2 - 2,5}{29} \approx 0,41$ $H = (1 - 0,41) = 0,59$ <p>Der Ballon hat über Grund eine Höhe von 590 m.</p>	<p>2(I) 4(II)</p>
1.5	Leiten Sie rechnerisch ... her. Dokumentieren Sie ... durch eine Skizze...	
	<p>Skizze der Situation:</p>  <p>Der Lotfußpunkt L liegt auf der Geraden, durch welche die Flugbahn beschrieben wird. Daher gilt für den Vektor <math>\overrightarrow{LB}</math></p> $\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OB} - (\vec{e} + r_L \cdot \vec{v})$ <p>Man verwendet die Orthogonalität der Vektoren <math>\overrightarrow{LB}</math> und <math>\vec{v}</math></p> $\begin{aligned} \overrightarrow{LB} \cdot \vec{v} &= 0 \\ (\overrightarrow{OB} - \vec{e} - r_L \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v} &= 0 \\ \overrightarrow{OB} \cdot \vec{v} - \vec{e} \cdot \vec{v} &= r_L  \vec{v} ^2 \\ 30,21 + 24,9055 &= 125,0441 r_L \end{aligned}$	<p>4(II) 6(III)</p>



	Anforderungen	Maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	<p>Daraus ergibt sich der Parameter <math>r_L</math> zu <math>r_L \approx 0,441</math>. Setzt man diesen ein, so ergibt sich (mit den gerundeten Werten berechnet):</p> $\overrightarrow{LB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0,45 \end{pmatrix} - 0,441 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 0,21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,205 \\ 0,59 \\ 0,45739 \end{pmatrix}$ <p>Damit erhält man <math> \overrightarrow{LB}  \approx 1,418</math></p> <p>Der Abstand des Ballons zur Hochspannungsleitung beträgt etwa 1418 m.</p>	
<b>1.6</b>	<b>Erläutern Sie, dass der Punkt S auf der Geraden liegt.</b>	
	<p>Der Spiegelpunkt muss auf einer Gerade durch die Projektionen der Punkte <math>B_1</math> und <math>B_2</math> in die <math>x_1</math>-<math>x_2</math>-Ebene liegen. Die Vektorgleichung dieser Geraden lautet:</p> $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5-4 \\ 7-5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	<b>2(I)</b> <b>2(II)</b>
<b>1.7</b>	<b>Leiten Sie einen Wert für den Parameter r her, so dass ... erfüllt ist.</b>	
	<p>Der Einfallswinkel und der Ausfallwinkel des reflektierten Lichtstrahles müssen gleich sein: <math>\tan \varphi_E = \tan \varphi_A</math></p> <p>Es seien <math>\vec{b}_{1p}</math> und <math>\vec{b}_{2p}</math> die Ortsvektoren der Projektion von <math>B_1</math> und <math>B_2</math> in die <math>x_1</math>-<math>x_2</math>-Ebene. <math>\vec{s}</math> bezeichne den Ortsvektor des Spiegelungspunktes S.</p> <p>Unter Verwendung des Richtungsvektors <math>\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}</math> ergibt sich:</p> <p><math>\vec{b}_{2p} = \vec{b}_{1p} + \vec{v}</math> und <math>\vec{s} = \vec{b}_{1p} + r \cdot \vec{v}</math> mit <math>r \in (0 ; 1)</math></p> <p>Aus der Identität der Winkel ergibt sich die folgende Gleichung:</p>	<b>7(III)</b>





	Anforderungen	Maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	$\frac{0,8}{ \vec{s} - \vec{b}_{1p} } = \frac{1}{ \vec{b}_{2p} - \vec{s} }$ $\frac{0,8}{ \vec{b}_{1p} + r \cdot \vec{v} - \vec{b}_{1p} } = \frac{1}{ \vec{b}_{1p} + \vec{v} - (\vec{b}_{1p} + r \cdot \vec{v}) }$ $\frac{0,8}{ r \cdot \vec{v} } = \frac{1}{ \vec{v} - r \cdot \vec{v} }$ <p>da r zwischen 0 und 1 liegt :</p> $\frac{0,8}{r} = \frac{1}{1-r}$ $0,8 - 0,8r = r$ $r = \frac{0,8}{1,8} = \frac{4}{9}$ <p>Damit ergibt sich der Punkt <math>S(104,\bar{4} \mid 105,\bar{8} \mid 0)</math>. (Angabe laut Aufgabenstellung nicht gefordert.)</p>	
Summe Aufgabe 1		45



## Aufgabe 2

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
2.1	<b>Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Bauteile ...</b>	
	<p><math>X</math> : Anzahl Bauteile, die intakt sind</p> <p><math>P_{0,90}(X = 20) = 0,90^{20} \approx 0,122</math></p> <p>Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,122 sind alle Bauteile intakt.</p>	5(I)
2.2	<b>Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit ...</b>	
	<p><math>p = 0,90</math>, <math>n = 20</math>, <math>k = 20 \cdot 0,8 = 16</math></p> <p><math>P_{0,90}(X \geq 16) = 1 - P_{0,90}(X \leq 15) = 0,9568</math> (aus der Tabelle abzulesen)</p> <p>Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,957 sind wenigstens 80% der Bauteile intakt.</p>	6(I)
2.3	<b>Bestimmen Sie rechnerisch, wie groß eine Stichprobe sein darf, damit ...</b>	
	<p><math>p = 0,90</math>, <math>n</math>: gesucht</p> <p><math>P_{0,90}(X = n) = 0,90^n</math></p> <p><math>0,90^n \geq 0,20 \quad n \leq \lg 0,20 / \lg 0,90 \approx 15,28</math></p> <p>Die Stichprobe darf höchstens 15 Bauteile enthalten, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,2 alle Bauteile intakt sind.</p>	3(I) 5(II)
2.4	<b>Bestimmen Sie den Annahme- und Verwerfungsbereich ...</b> <b>Leiten Sie daraus eine verständliche Anweisung ... her.</b>	
	<p><math>H_0</math> : Die Stichprobe stammt von Anlage A</p> <p><math>X</math> : Anzahl der Bauteile, die intakt sind</p> <p><math>n = 20</math>, <math>p = 0,90</math>, <math>\alpha = 0,05</math></p> <p><math>H_0</math> wird verworfen, falls <math>X &lt; k</math></p> <p><math>P_{0,90}^{20}(X &lt; k) \leq 0,05 \Leftrightarrow P_{0,90}^{20}(X \leq k-1) \leq 0,05</math>, die Tabelle liefert <math>k-1 = 15</math></p> <p>Verwerfungsbereich für <math>H_0</math> : [ 0 ; 15 ]</p> <p>Annahmebereich für <math>H_0</math> : [ 16 ; 20 ]</p> <p>Wenn der Kontrolleur bis zu 15 defekte Teile in der Stichprobe findet, verwirft er die Hypothese, es handele sich um eine Probe von Anlage A, mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von <math>\alpha = 0,05</math>.</p>	5(II) 3(III)

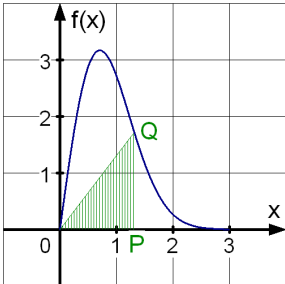


	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
2.5	<b>Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art und beurteilen Sie das Ergebnis.</b>	
	<p>Fehler zweiter Art: Der Kontrolleur nimmt an, dass es sich um eine Stichprobe von Anlage A handelt, obwohl sie von Anlage B stammt.</p> <p>Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Wahrscheinlichkeit von <math>p = 0,8</math> mehr als 15 Bauteile zu finden sind, die intakt sind.</p> $P_{0,80}^{20}(X \geq 16) = 1 - P_{0,80}^{20}(X \leq 15) = 0,6296 \quad (\text{aus der Tabelle abzulesen})$ <p>Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,63 nimmt der Kontrolleur an, dass es sich um eine Stichprobe von Anlage A handelt, obwohl die Stichprobe von Anlage B stammt. Dies ist eine sehr hohe Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art. Anmerkung (nicht in der Lösung gefordert): Das ist nicht verwunderlich, da die Fehlerwahrscheinlichkeiten der Anlagen A und B nahe zusammen liegen und der Erwartungswert der Alternative im Annahmebereich der Hypothese liegt.</p>	<p>2(II) 3(II) 3(III)</p>
2.6	<b>Leiten Sie rechnerisch die Anzahl ...</b>	
	<p>X ist binomialverteilt mit <math>n = 150</math>; <math>p = 0,8</math></p> $P_{0,80}^{150}(X > k) \leq 0,01 \Leftrightarrow 1 - P_{0,80}^{150}(X \leq k) \leq 0,01 = P_{0,80}^{150}(X \leq k) \geq 0,99$ $\Phi\left(\frac{k + 0,5 - 150 \cdot 0,80}{\sqrt{150 \cdot 0,20 \cdot 0,80}}\right) \geq 0,99 \quad \text{aus der Tabelle ist folgender Zusammenhang abzulesen:}$ $\frac{k - 119,5}{\sqrt{24}} \geq 2,33 \Leftrightarrow k \geq 130,91$ <p>Ab einer Anzahl von 131 intakten Bauteilen würde man die Hypothese <math>H_0</math> annehmen.</p>	<p>3(II) 7(III)</p>
Summe Aufgabe 2		45



Auswahlaufgabe 3

	Anforderungen	Maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
3.1	Erläutern Sie, dass die Funktionsschar $f_k$ diese Anforderung erfüllt.	
	<p>Symmetrieverhalten:</p> $f_k(-x) = -x \cdot e^{k-(-x)^2} = -x \cdot e^{k-x^2} = -f_k(x)$ <p>Damit liegt Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung <math>O(0 0)</math> vor.</p>	4(I)
3.2	Ermitteln Sie diejenigen Punkte, ...	
	<p>Ableitungen:</p> $f_k'(x) = 1 \cdot e^{k-x^2} + x \cdot e^{k-x^2} \cdot (-2x) = (1-2x^2) \cdot e^{k-x^2}$ $f_k''(x) = -4x \cdot e^{k-x^2} + (1-2x^2) \cdot e^{k-x^2} \cdot (-2x) = (4x^3 - 6x) \cdot e^{k-x^2}$ <p>Extrema: Notwendige Bedingung <math>f_k'(x_E) = 0</math></p> $0 = 1 - 2x_E^2 \Leftrightarrow x_{E1/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ <p>Hinreichende Bedingung <math>f_k''(x_E) \neq 0</math></p> $f_k''(x_{E1}) = (4 \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}})^3 - 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot e^{k-\frac{1}{2}} = \frac{2-6}{\sqrt{2}} \cdot e^{k-\frac{1}{2}} < 0$ <p>aus der Symmetrie folgt <math>f_k''(x_{E2}) &gt; 0</math></p> $f_k(x_{E1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot e^{0,5-k}}$ <p>damit liegt das Maximum bei <math>H\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mid \frac{1}{\sqrt{2} \cdot e^{0,5-k}}\right)</math></p> <p>und aus Symmetriegründen das Minimum bei <math>T\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \mid \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot e^{0,5-k}}\right)</math></p>	7(I)
3.3	Bestimmen Sie $k$ so, dass dies erreicht wird.	
	<p>Gleichsetzen der Bedingung mit der gegebenen y-Koordinate liefert:</p> $y_{\max} = \frac{e^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{e^2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot e^{0,5-k}} \Leftrightarrow e^2 \cdot e^{0,5-k} = 1 \Leftrightarrow e^{2,5-k} = 1 \Leftrightarrow k = 2,5$	<p>3(I)</p> <p>2(II)</p>

	Anforderungen	Maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
3.4	Leiten Sie her, dass ... und zeigen Sie, dass für $u = 1$ der Flächeninhalt maximal ist.	
	 <p>herzuleitende Fläche <math>A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h</math></p> <p>mit <math>g = u</math> und <math>h = f_2(u)</math> ergibt sich:</p> $A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot u \cdot e^{2-u^2} = \frac{u^2 \cdot e^2}{2 \cdot e^{u^2}}$ <p>Maximierung von <math>A(u)</math> mit Produkt- oder Quotientenregel</p> <p>Ableitungen von <math>A(u)</math>:</p> $A'(u) = \frac{e^2}{2} \cdot \frac{2u \cdot e^{u^2} - u^2 \cdot 2u \cdot e^{u^2}}{e^{u^4}} = \frac{e^2}{2} \cdot \frac{2u - 2u^3}{e^{u^2}} = (u - u^3) \cdot e^{2-u^2}$ $A''(u) = (1 - 3u^2) \cdot e^{2-u^2} + (u - u^3) \cdot e^{2-u^2} \cdot (-2u) = (2u^4 - 5u^2 + 1) \cdot e^{2-u^2}$ <p>Die Überprüfung der notwendigen Bedingung liefert Nullstellen der 1. Ableitung bei 0 und <math>\pm 1</math></p> <p>Prüfung der hinreichenden Bedingung an der Stelle <math>u_1 = 1</math> liefert:</p> $A''(1) = (2 - 5 + 1) \cdot e^{2-1} = -2 \cdot e < 0, \text{ also Maximum an der Stelle } u_1 = 1$	<p>6(II) 3(III)</p>

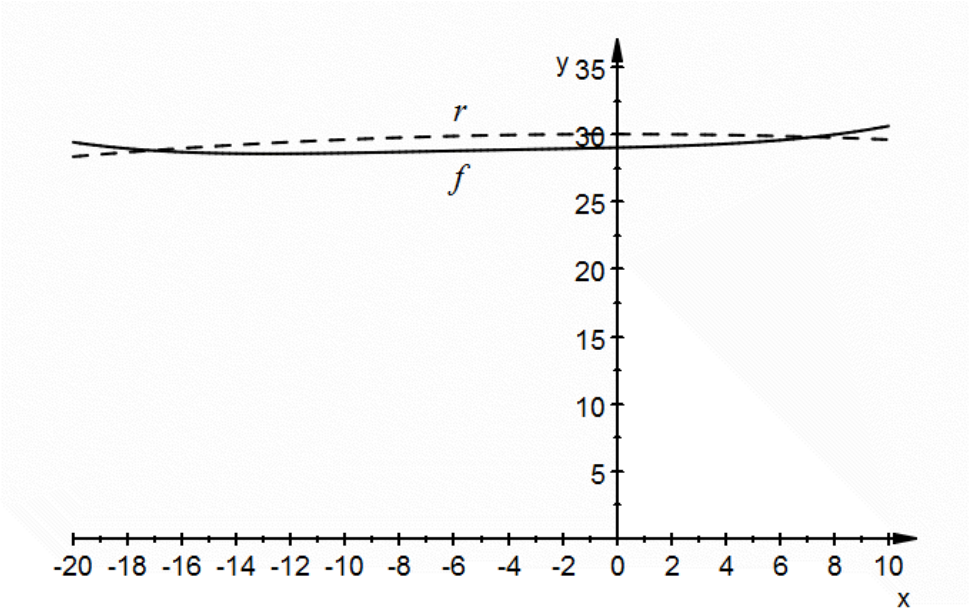


	Anforderungen	Maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
3.5	<p><b>Weisen Sie nach ...</b></p> <p><b>Zeigen Sie dazu zunächst, dass die Funktion <math>F_2</math> ...</b></p>	
	<p><math>F_2(x) = \frac{-e^2}{2} \cdot e^{-x^2}</math> ist gegeben</p> <p>Nachweis der Stammfunktion-Eigenschaft erfolgt durch Differenzieren:</p> $F_2'(x) = \frac{-e^2}{2} \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = 2x \cdot \frac{e^2}{2} \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{2-x^2}$ <p>Durch Einsetzen des Wertes <math>k = 2</math> in die Parameterfunktionsgleichung <math>f_k(x) = x \cdot e^{k-x^2}</math> ist das Ergebnis bestätigt.</p> <p>Die Fläche zwischen den beiden Bachverläufen ergibt sich durch Integration:</p> $A = \int_0^2 f_2(x) dx = \left  \frac{-e^2}{2} [e^{-x^2}]_0^2 \right  = \left  \frac{-e^2}{2} \cdot (e^{-2^2} - e^{-0^2}) \right  = \frac{1-e^{-4}}{2} \cdot e^2 \approx 3,627$ <p>Die maximale Fläche des Blumenbeets aus Aufgabe 3.4 berechnet sich durch:</p> $A(1) = \frac{e^2}{2} \cdot \frac{1^2}{e^{1^2}} = \frac{e}{2} \approx 1,359 < \frac{1}{2} \cdot 3,627$ <p>Also ist die Fläche des Blumenbeets kleiner als die Hälfte der Fläche zwischen den beiden Bachverläufen und die Vorgabe erfüllt.</p>	<p>5(II)</p> <p>5(III)</p>
3.6	<p><b>Leiten Sie die Funktionsvorschrift des Parabelastes her und bestimmen Sie den Wert von <math>t</math>.</b></p>	
	<p>Ansatz der Parabel in Scheitelform <math>p(x) = a(x-t)^2</math></p> <p>Aus dem Sachverhalt ergeben sich die folgenden zwei Bedingungen</p> $f_2(x_2) = p(x_2)$ $f_2'(x_2) = p'(x_2)$ <p>diese führen für <math>x_2 = 2</math> auf das folgende nichtlineare Gleichungssystem:</p> $2e^{-2} = a(2-t)^2$ $-7e^{-2} = 2a(2-t)$ <p>Dies ergibt die Lösungen <math>t = \frac{18}{7} &gt; 2</math> und <math>a = \frac{49}{8} e^{-2}</math></p>	<p>5(II)</p> <p>5(III)</p>
Summe Auswahlaufgabe 3		45

Summe Aufgabe 1 – 3

135

Auswahlaufgabe 4

	Anforderungen	Maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
4.1	<b>Ermitteln Sie die Bedingungen für das Aufstellen dieser Funktion und bestimmen Sie die Funktionsgleichung.</b>	
	<p>Bedingungen:  <math>f(-15) = 28,6</math> <math>f(-10) = 28,6</math> <math>f(-5) = 28,8</math> <math>f(0) = 29</math> <math>f(5) = 29,4</math></p> <p>Aus dem Gleichungssystem lassen sich die 5 Koeffizienten einer Polynomfunktion 4. Grades ermitteln. Der Ansatz <math>f(x) = \sum_{i=0}^4 a_i \cdot x^i</math> führt zu:</p> $f(x) = \frac{1}{37500}x^4 + \frac{1}{1875}x^3 + \frac{1}{300}x^2 + \frac{7}{150}x + 29$	<p><b>3 (I)</b> <b>3 (II)</b></p>
4.2	<b>Stellen Sie die Funktionen ... grafisch dar.</b>	
	<p>Graphische Darstellung</p> 	<b>5 (I)</b>
4.3	<b>Bestimmen Sie den geringsten Abstand eines solchen Riemens zur Rotationsachse.</b>	
	<p>Der Ansatz <math>f'(x) = 0</math> ergibt als Lösung den Wert <math>x_e \approx -12,79</math>. Die Überprüfung mit dem hinreichenden Kriterium zeigt <math>f''(x_e) &gt; 0</math>, es handelt sich also um eine Minimalstelle. Der geringste Abstand berechnet sich mit Hilfe von <math>f(x_e)</math> zu etwa 28,5 mm.</p>	<b>6 (I)</b>



	Anforderungen	Maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
4.4	<p><b>Ermitteln Sie das Intervall ...</b></p> <p><b>Begründen Sie Ihre Vorgehensweise.</b></p>	
	<p>Die Schnittstellen der beiden Funktionen sind zu bestimmen, da der Verlauf nur sinnvoll durch <math>f</math> beschrieben wird, wenn gilt <math>f(x) \leq r(x)</math>.</p> <p>Die Ermittlung der Schnittstellen ist nur numerisch möglich. Die Zeichnung legt zwei sinnvolle Lösungen nahe, die sich z.B. durch einen numerisch arbeitenden solve-Befehl oder das Newtonverfahren bestimmen lassen.</p> <p>Es ergeben sich die untere Grenze <math>x_1 \approx -17,1</math> und die obere Grenze <math>x_2 \approx 7,2</math>.</p>	<p><b>4 (II)</b> <b>3 (III)</b></p>
4.5	<p><b>Zeigen Sie, wie das Newtonverfahren ... angewendet werden kann.</b></p> <p><b>Leiten Sie die Iterations-Formel ... her.</b></p>	
	<p>Das Newtonverfahren ist ein iteratives Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle einer Funktion. Daher lässt es sich bei der Schnittstellenbestimmung auf die Differenzfunktion <math>f := f_2 - f_1</math> anwenden. Die Nullstellen dieser Funktion sind die Schnittstellen der beiden Funktionen <math>f_2</math> und <math>f_1</math>.</p> <p>Prinzipiell erhält man beim Newtonverfahren den jeweils nächsten Näherungswert <math>x_{n+1}</math> aus dem vorhergehenden Wert <math>x_n</math>, indem die Nullstelle der Tangente an <math>f</math> im Punkt <math>(x_n   f(x_n))</math> berechnet wird. Man linearisiert also die Funktion in der Umgebung des aktuellen Iterations-Wertes. Die Tangente ist durch <math>t(x) = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)</math> gegeben, durch den Ansatz <math>t(x_{n+1}) = 0</math> erhält man nach kurzer Umformung:</p> $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	<b>7(III)</b>
4.6	<p><b>Bestimmen Sie die Menge des Rollenmaterials ...</b></p>	
	<p>Der verschlissene Bereich wird durch den Bereich zwischen der Rollenfunktion und der Verschleißfunktion dargestellt. Man erhält die Menge des verlorenen Materials, indem man die Differenz der Volumina beider Körper bildet:</p> $V = V_r - V_f = \pi \int_{x_1}^{x_2} (r(x))^2 dx - \pi \int_{x_1}^{x_2} (f(x))^2 dx$ <p>Die Berechnung ergibt <math>V \approx 3645</math>. Durch den Abrieb hat man ca. <math>3644 \text{ mm}^3</math> Material verloren.</p>	<b>7 (II)</b>





	Anforderungen	Maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
4.7	Zeigen Sie rechnerisch, dass ...	
	<p>Die Stelle, an welcher die Riemenscheibe am stärksten abgeschliffen wurde, ist durch die Maximalstelle der Differenzfunktion von Rollenfunktion und Verschleißfunktion gegeben. Die Bestimmung des Maximums erfolgt durch Anwendung des notwendigen und eines hinreichenden Kriteriums.</p> <p>Bezeichnung: <math>d(x) = r(x) - f(x)</math>. Der Ansatz <math>d'(x) = 0</math> ergibt die Lösung <math>x_m \approx -4,97</math>.</p> <p>Einsetzen in die zweite Ableitung: <math>d''(x_m) \approx -0,0068</math> also liegt bei <math>x_m</math> ein Maximum der Differenzfunktion vor. Dies ist die Stelle, an welcher die Riemenscheibe am stärksten abgeschliffen wurde. Diese Stelle stimmt nicht mit der angegebenen Stelle des minimalen Durchmessers überein.</p>	<p>4 (II) 3(III)</p>
Summe Auswahlaufgabe 4		45

Summe Aufgabe 1, 2, 4 **135**



## 9 Bewertungsbogen zur Abiturprüfung im Fach Mathematik-Technik

Name des Prüflings: \_\_\_\_\_ Kurs: \_\_\_\_\_

Schule: \_\_\_\_\_

### Aufgabe 1

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreich- bare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
1.1	bestimmt vektoriell den Blickwinkel	5(I)			
1.2.1	erkennt die notwendigen Vektoren	3(I)			
1.2.2	beschreibt die Landschaftsebene in Koordinatenform	4(II)			
1.3.1	berechnet den Vektor der Blickrichtung	2(I)			
1.3.2	berechnet unter Verwendung des Normalenvektors den Winkel	4(II)			
1.4.1	berechnet die Position des Ballons in der Ebene	2(I)			
1.4.2	berechnet die Höhe	4(II)			
1.5.1	dokumentiert die benötigten Vektoren in einer Skizze	4(II)			
1.5.2	leitet rechnerisch den Abstand her	6(III)			
1.6.1	erläutert, dass der Punkt auf der Verbindungsgeraden zwischen den Projektionen von $B_1$ und $B_2$ liegt	2(II)			
1.6.2	erläutert die Parameterdarstellung der Geraden	2(I)			
1.7	leitet den Parameter $r$ her	7(III)			
<b>Summe Aufgabe 1</b>		<b>45</b>			



**Aufgabe 2**

	<b>Anforderungen</b> Der Prüfling...	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
<b>2.1</b>	berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit	<b>5(I)</b>			
<b>2.2</b>	ermittelt die Wahrscheinlichkeit	<b>6(I)</b>			
<b>2.3.1</b>	bestimmt die benötigte Ungleichung	<b>5(II)</b>			
<b>2.3.2</b>	bestimmt die gesuchte Anzahl der Bauteile	<b>3(I)</b>			
<b>2.4.1</b>	bestimmt den Annahme- und Verwerfungsbereich des Hypothesentests	<b>5(II)</b>			
<b>2.4.2</b>	leitet die Entscheidungsregel für den Kontrolleur her	<b>3(III)</b>			
<b>2.5.1</b>	beschreibt den Fehler 2. Art	<b>2(II)</b>			
<b>2.5.2</b>	ermittelt die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art	<b>3(II)</b>			
<b>2.5.3</b>	beurteilt das Ergebnis	<b>3(III)</b>			
<b>2.6.1</b>	leitet die notwendige Ungleichung zur Berechnung der Anzahl mithilfe der Näherung her	<b>7(III)</b>			
<b>2.6.2</b>	leitet rechnerisch her, ab welcher Anzahl der Bauteile die Hypothese angenommen werden kann	<b>3(II)</b>			
<b>Summe Aufgabe 2</b>		<b>45</b>			



**Auswahlaufgabe 3**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreich- bare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
<b>3.1</b>	erläutert, dass $f_k$ die Anforderung erfüllt	<b>4 (I)</b>			
<b>3.2</b>	ermittelt die Extrempunkte	<b>7 (I)</b>			
<b>3.3.1</b>	erkennt die Bedingung für k	<b>2 (II)</b>			
<b>3.3.2</b>	bestimmt den Parameter k	<b>3 (I)</b>			
<b>3.4.1</b>	leitet die Flächeninhaltsfunktion her	<b>3 (III)</b>			
<b>3.4.2</b>	zeigt, dass für $u = 1$ der Flächeninhalt maximal ist	<b>6 (II)</b>			
<b>3.5.1</b>	zeigt, dass $F_2$ eine Stammfunktion von $f_2$ ist	<b>5 (II)</b>			
<b>3.5.2</b>	weist nach, dass die Blumenbeetfläche höchstens die Hälfte der Abstandsfläche der beiden Bachverläufe beträgt	<b>5 (III)</b>			
<b>3.6.1</b>	leitet die Funktionsgleichung für die Parabel her	<b>5(III)</b>			
<b>3.6.2</b>	bestimmt den Wert des Parameters t	<b>5(II)</b>			
	<b>Summe Auswahlaufgabe 3</b>	<b>45</b>			

**Summe Aufgabe 1-3**

<b>135</b>			
------------	--	--	--



**Auswahlaufgabe 4**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreich- bare Punkt- zahl (AFB)	EK	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
<b>4.1.1</b>	ermittelt die Bedingungen	<b>3(II)</b>			
<b>4.1.2</b>	bestimmt die Funktionsgleichung	<b>3(I)</b>			
<b>4.2</b>	stellt die beiden Funktionen graphisch in einem geeigneten Intervall dar	<b>5(I)</b>			
<b>4.3</b>	bestimmt den gesuchten Abstand	<b>6(I)</b>			
<b>4.4.1</b>	begründet, dass die Schnittstellen bestimmt werden müssen	<b>3(III)</b>			
<b>4.4.2</b>	ermittelt die Schnittstellen	<b>4(II)</b>			
<b>4.5.1</b>	zeigt, dass sich das Newtonverfahren anwenden lässt	<b>3(III)</b>			
<b>4.5.2</b>	leitet die Iterations-Formel her	<b>4(III)</b>			
<b>4.6</b>	bestimmt den Materialverlust als Differenz zweier Rotationsvolumina	<b>7(II)</b>			
<b>4.7.1</b>	erkennt, dass die gesuchte Stelle das Maximum der Differenzfunktion ist	<b>3(III)</b>			
<b>4.7.2</b>	zeigt, dass die Stelle nicht mit der gegebenen Stelle übereinstimmt	<b>4(II)</b>			
<b>Summe Auswahlaufgabe 4</b>		<b>45</b>			

<b>Summe Aufgabe 1 ,2,4</b>	<b>135</b>			
-----------------------------	------------	--	--	--



b) Darstellungsleistung - aufgabenübergreifend

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1.	stellt den Lösungsweg in strukturierter Form dar.	4			
2.	beachtet die Qualität der äußeren Form und hält formale Regeln ein.	4			
3.	verwendet Fachsprache und Fachsymbolik	4			
4.	fertigt Zeichnungen, Grafiken und Tabellen in angemessener Qualität an.	3			
<b>Summe Darstellungsleistung</b>		<b>15</b>			

	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
<b>Summe insgesamt (inhaltliche Leistung und Darstellungsleistung)</b>	<b>150</b>			
<b>Aus der Punktesumme resultierende Note</b>				
<b>Note</b> (ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gem. § 8 (4), APO-BK, Anlage D)				
<b>Paraphe</b>				

Die Klausur wird abschließend mit der Note

\_\_\_\_\_ ( \_\_\_\_\_ Notenpunkte)

bewertet.

\_\_\_\_\_  
Datum                      Unterschrift (EK)

\_\_\_\_\_  
Datum                      Unterschrift (ZK)

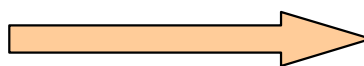
\_\_\_\_\_  
Datum                      Unterschrift (DK)



## Notenfindung

% Anteil erbrachter Leistung		Noten- Punkte	Notenstufen	Rohpunkte	
von	bis			von	bis
95%	100%	15	sehr gut plus	143	150
90%	< 95%	14	sehr gut	135	142
85%	< 90%	13	sehr gut minus	128	134
80%	< 85%	12	gut plus	120	127
75%	< 80%	11	gut	113	119
70%	< 75%	10	gut minus	105	112
65%	< 70%	9	befriedigend plus	98	104
60%	< 65%	8	befriedigend	90	97
55%	< 60%	7	befriedigend minus	83	89
50%	< 55%	6	ausreichend plus	75	82
45%	< 50%	5	ausreichend	68	74
39%	< 45%	4	ausreichend minus	59	67
33%	< 39%	3	mangelhaft plus	50	58
27%	< 33%	2	mangelhaft	41	49
20%	< 27%	1	mangelhaft minus	30	40
0%	< 20%	0	ungenügend	0	29

maximal erreichbare Gesamtpunktzahl



**150**