



Zentrale Abiturprüfung 2009

in den Bildungsgängen des Berufskollegs
1. Leistungskurs

Fach Mathematik

Fachbereich Technik

Unterlagen für die Lehrkraft



1 Konstruktionsmerkmale der Aufgabe

Aufgaben	Aufgabenarten
Aufgabe 1	Analysis Kondensator
Aufgabe 2	Analysis Windrad
Auswahlaufgabe 3	Lineare Algebra Tetraeder von Bottrop
Auswahlaufgabe 4	Stochastik Raid System

In der Abiturprüfung sind insgesamt drei der vier Aufgaben zu bearbeiten.

Die Bearbeitung der zwei Analysis-Aufgaben ist verbindlich.

Eine Aufgabenauswahl durch die Schule findet nur zwischen den Aufgaben aus den inhaltlichen Schwerpunkten Lineare Algebra und Stochastik statt.

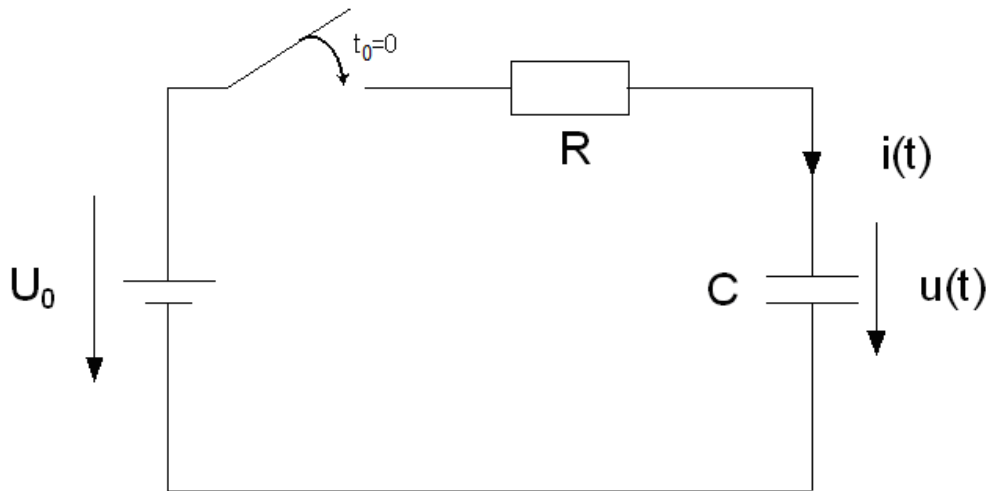
Die Schülerinnen und Schüler erhalten keine Aufgaben zur Auswahl.

2 Aufgabenstellung

Aufgabe 1

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Im Folgenden soll der Ladevorgang eines Kondensators genauer untersucht werden. Ein idealer Kondensator mit der Kapazität C wird über einen Widerstand R an eine Gleichspannungsquelle angeschlossen. Die Gleichspannungsquelle liefert die konstante Spannung U_0 . Der Ladevorgang beginnt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, wenn der Schalter geschlossen wird (vgl. untenstehende Abb.).



Für die Stromstärke und Spannung am Kondensator gilt beim Ladevorgang:

Spannung u : $u(t) = 200 \cdot (1 - e^{-\frac{5}{8}t})$ t in s, $u(t)$ in V

Stromstärke i : $i(t) = \frac{1}{500} \cdot e^{-\frac{5}{8}t}$ t in s, $i(t)$ in A

- 1.1 Skizzieren Sie die Graphen der Spannung u und der Stromstärke i im Intervall $[0;10]$. **(7 Punkte)**
- 1.2 Die Tangente an den Graphen der Funktion $i(t)$ an der Stelle 0 schneidet die t -Achse bei $t_1 = \tau$. Zeigen Sie, dass gilt: $\tau = 1,6$. Näherungsweise erreicht der Kondensator nach einer Zeit von 5τ seine Maximalspannung. Vergleichen Sie diesen Wert mit der theoretisch erreichbaren Maximalspannung von 200 V. **(10 Punkte)**
- 1.3 Berechnen Sie den Mittelwert der Stromstärke i in den ersten 5 Sekunden des Ladevorganges.



Hinweis: Allgemein gilt für den Mittelwert \bar{f} einer stetigen Funktion $f(x)$ im Intervall $[a;b]$: $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$ **(9 Punkte)**

- 1.4 Die Leistung p am Kondensator berechnet sich zu $p(t) = u(t) \cdot i(t)$. Berechnen Sie die maximale Leistung und den Zeitpunkt, an dem diese erreicht wird. **(9 Punkte)**

- 1.5 Allgemein verhalten sich Stromstärke i und Spannung u beim Ladevorgang am Kondensator mit der konstanten Kapazität C über den konstanten Widerstand R nach folgenden Gesetzmäßigkeiten:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad u(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Zeigen Sie anhand dieser Gesetzmäßigkeiten, dass sich die Energie W , die ein an eine Gleichspannungsquelle angeschlossener Kondensator maximal aufnehmen kann (also bei „unendlich langer Ladezeit“) zu $W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_0^2$ berechnet.

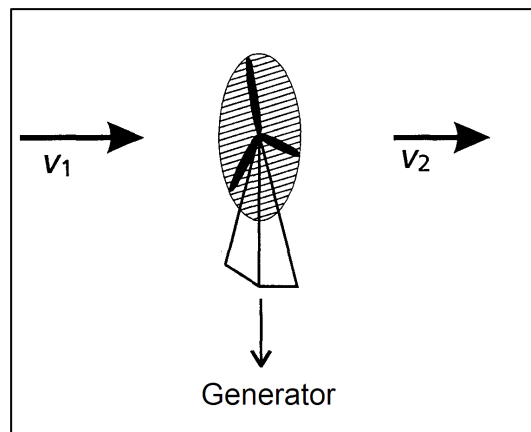
Hinweis: Für die Energie W , die ein Kondensator bis zur Zeit $t = t_E$ aufnimmt,

gilt allgemein: $W(t_E) = \int_0^{t_E} p(t) dt$ mit $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ **(10 Punkte)**

Aufgabe 2

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Bei der Energiegewinnung mit einem Windrad strömt die Luft mit der Geschwindigkeit v_1 auf das Windrad zu und mit der Geschwindigkeit v_2 vom Windrad weg. Da ein Windrad der Luft Bewegungsenergie entnimmt, um z.B. mit einem angeschlossenen Generator elektrische Energie zu erzeugen, muss $v_2 < v_1$ sein. Das Windrad kann der Luft nicht die gesamte Energie entnehmen, denn je kleiner v_2 ist, desto weniger Luft kann durch das Windrad strömen, so dass die Geschwindigkeit v_2 immer größer als 0 ist.



Der Wirkungsgrad $\eta(a)$ des Windrades wird durch das Verhältnis $a = \frac{v_2}{v_1}$ bestimmt:

$$\eta(a) = -\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$$

- 2.1 Bestimmen Sie begründet einen der Situation entsprechenden sinnvollen Definitionsbereich der Funktion $\eta(a)$. **(7 Punkte)**
- 2.2 Skizzieren Sie den Graphen des Wirkungsgrades η im Intervall $]0; 1]$. **(6 Punkte)**
- 2.3 Berechnen Sie den maximalen Wirkungsgrad η_{\max} des Windrades. **(10 Punkte)**
- 2.4 Die Wendestelle liegt nicht im Definitionsbereich. Berechnen Sie die Wendestelle der Funktion $\eta(a)$ für $a \in \mathbb{R}$. **(9 Punkte)**
- 2.5 Das Verhältnis a kann durch die Änderung der Flügelstellung beeinflusst werden. Im Rahmen eines Tests wird das Windrad kontinuierlich im Bereich von $a_1=0,2$ bis $a_2=0,6$ betrieben.

Für n einzelne Messwerte $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ lässt sich das arithmetische Mittel durch

$$\bar{\eta}^* = \frac{1}{n}(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i \text{ bestimmen. Begründen Sie, dass der Mittel-}$$

wert $\bar{\eta}$ der stetigen Funktion $\eta(a)$ durch

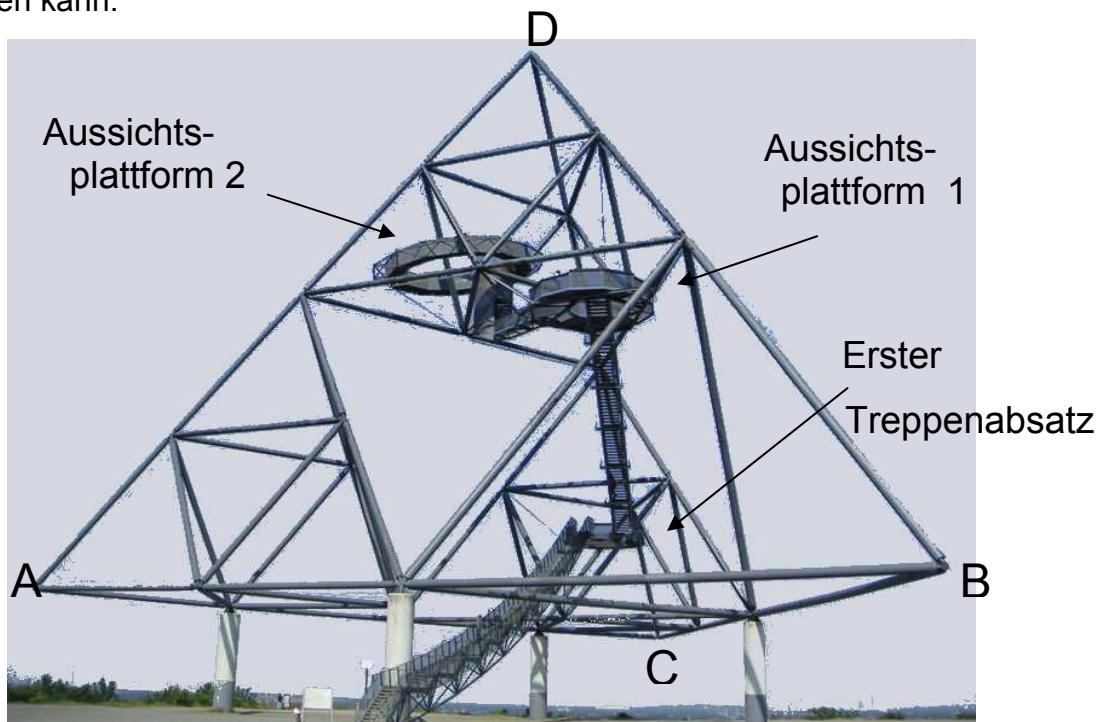
$$\bar{\eta} = \frac{1}{a_2 - a_1} \cdot \int_{a_1}^{a_2} \eta(a) da$$

gegeben ist und berechnen Sie den Mittelwert des Wirkungsgrades während des Tests. **(13 Punkte)**

Auswahlaufgabe 3

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Auf einer Halde eines ehemaligen Zechengeländes steht ein Wahrzeichen des Ruhrgebietes: das Tetraeder in Bottrop. Über Treppen lassen sich zwei Aussichtsplattformen erreichen, so dass man von dort einen wunderbaren Blick über das Ruhrgebiet genießen kann.



Das Tetraeder in Bottrop besteht aus vier annähernd gleichseitigen Dreiecken der Kantenlänge $l = 60$ m. Es steht auf vier Stützpfeilern, die jeweils 8 m hoch sind. Die Eckpunkte des Tetraeders sind $A(0 \mid 0 \mid 8)$, $B(60 \mid 0 \mid 8)$, $C(30 \mid 52 \mid 8)$ und $D(30 \mid 17\frac{1}{3} \mid 57)$. Um die Berechnungen zu vereinfachen, sind einige dieser Werte gerundet angegeben (in Metern).

- 3.1 Der erste Treppenabsatz liegt in einer Ebene E_1 . Die Punkte $P_1(15 \mid 11 \mid 20)$, $P_2(18 \mid 7 \mid 20)$ und $P_3(12 \mid 7 \mid 20)$ liegen in dieser Ebene E_1 . Bestimmen Sie die zugehörige Ebenengleichung in Parameter- und Koordinatenform. **(8 Punkte)**
- 3.2 Die Aussichtsplattform 1 ist über eine Treppe erreichbar, die von Punkt $P_1(15 \mid 11 \mid 20)$ zum Punkt $Q_1(28 \mid 23 \mid 38)$ führt. Bestimmen Sie die Geradengleichung, mit der sich diese Treppe beschreiben lässt. Berechnen Sie den Winkel der Geraden zur Ebene 1 (Kontrollergebnis: $E_1: x_3=20$). **(8 Punkte)**
- 3.3 Die Punkte $R_1(33 \mid 9 \mid 42)$, $R_2(33 \mid 19 \mid 40,5)$ und $R_3(29 \mid 11 \mid 41,5)$ liegen in der Ebene E_2 der geneigten Aussichtsplattform 2. Die Plattform besteht angenähert aus einem Kreisring mit dem Außendurchmesser $d = 11$ m. Berechnen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung den Neigungswinkel der Plattform. Zeigen Sie, dass der maximale Höhenunterschied dieses Ringes ca. 1,72 m beträgt. **(12 Punkte)**



- 3.4 Ein Künstler möchte das Tetraeder einschließlich seiner Grundfläche mit Stoff verhüllen. Berechnen Sie, wie viel Quadratmeter Stoff benötigt werden. (Die Stützen bleiben sichtbar, die Dreiecke des Tetraeders können näherungsweise als flächengleich betrachtet werden.) **(8 Punkte)**
- 3.5 Um den Aufstieg zu ermöglichen, muss in der Verkleidung der Grundfläche eine Öffnung bleiben. Zur Ortsbestimmung dieser Öffnung wird die gebogene Aufstiegstreppe zum ersten Treppenabsatz durch eine Gerade durch die Punkte $S(50 \mid 33 \mid 0)$ und $P_2(18 \mid 7 \mid 20)$ angenähert. Zeigen Sie rechnerisch, an welcher Stelle der Verkleidung der Grundfläche eine Öffnung für die Treppe freigehalten werden muss. **(9 Punkte)**

Für die gesamte Darstellungsleistung werden bis zu **15 Punkte** vergeben.

Maximal erreichbare Gesamtpunktzahl: **150 Punkte**

Auswahlaufgabe 4

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Ein RAID-System („redundant array of independent disks“) ist ein aus mehreren Festplatten bestehendes Speichersystem und gewährleistet eine höhere Datensicherheit.

Das hier betrachtete, vereinfachte RAID-System funktioniert wie folgt:

Jedes Byte besteht aus acht Bit (deren jeweiliger Wert ist „0“ oder „1“). Diese acht Bit werden nicht mehr auf einer einzelnen Festplatte, sondern getrennt auf acht voneinander unabhängigen Festplatten gespeichert. Auf einer neunten Festplatte wird zu jedem Byte ein zusätzliches „Kontroll-Bit“ gespeichert, und zwar mit dem Wert „1“, wenn das entsprechende Byte auf den 8 übrigen Festplatten aus einer ungeraden Anzahl von Einsen besteht, und mit dem Wert „0“, wenn es aus einer geraden Anzahl von Einsen besteht.



Fällt eine Festplatte aus, kann diese durch eine neue Festplatte ersetzt werden, und der Inhalt der ausgefallenen Festplatte kann sofort rekonstruiert werden. Problematisch wird es, wenn zwei (oder mehr) Festplatten ausfallen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Festplatte der Firma Datasafe innerhalb eines Zeitraumes von einem Jahr nicht ausfällt, beträgt $p = 0,8641$.

- 4.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitraum von einem Jahr zwei oder mehr Festplatten ausfallen. **(7 Punkte)**
- 4.2 Erläutern Sie, warum es sich bei der Verteilung der Zufallsgröße X : „Anzahl der in einem Jahr ausgefallenen Platten“ um eine Binomialverteilung handelt. Berechnen Sie für den Zeitraum von einem Jahr den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsgröße X . **(7 Punkte)**
- 4.3 Da eine tägliche Sicherung des RAID stattfindet, treten unwiederbringliche Datenverluste nur auf, wenn zwei oder mehr Festplatten am gleichen Tag ausfallen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Festplatte an einem bestimmten Tag ausfällt, beträgt $p = 0,0004$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das RAID-System an einem bestimmten Tag mit unwiederbringlichen Datenverlusten ausfällt.
Die Wahrscheinlichkeit des Datenverlustes bei Speicherung auf einer einzigen Festplatte ist um ein Vielfaches größer, als bei der Speicherung auf einem RAID-System. Bestimmen Sie diesen Faktor. **(10 Punkte)**



Beachten Sie für die Teilaufgaben 4.4 und 4.5 die folgende Zusatzinformation:

Die Firma Datasafe arbeitet bei ihrer Produktion sehr zuverlässig, die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis D: „eine Festplatte ist defekt“ beträgt 0,015.

4.4 Die Qualitätskontrolle vermutet: „Bei einer Abnahme durch einen Großkunden ist die Wahrscheinlichkeit bei einer zufälligen Auslieferung mindestens eine defekte Festplatte zu erhalten größer als 0,99.“ Zeigen Sie rechnerisch bei welcher Abnahmemenge die Wahrscheinlichkeit diesen Wert von 0,99 übersteigt.
(10 Punkte)

4.5 Die Aussonderung der defekten Festplatten erfolgt in der Qualitätskontrolle. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine geprüfte Festplatte einwandfrei ist und ausgesondert wird beträgt 0,012. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,98 wird eine Festplatte bei der Kontrolle nicht ausgesondert.
Zeigen Sie mit einer geeigneten stochastischen Darstellung, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Festplatte defekt ist und ausgesondert wird 0,008 beträgt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit mit der eine defekte Festplatte tatsächlich ausgesondert wird.
(11 Punkte)

Für die gesamte Darstellungsleistung werden bis zu **15 Punkte** vergeben.

Maximal erreichbare Gesamtpunktzahl: **150 Punkte**



3 Materialgrundlage

keine

4 Bezüge zu den „Vorgaben für die Abiturprüfung am Berufskolleg im Jahr 2009“

In den vier Aufgaben spiegeln sich die im Punkt 3.1 der „Vorgaben für die Abiturprüfung am Berufskolleg im Jahr 2009“ aufgeführten inhaltlichen Schwerpunkte wieder.

5 Zugelassene Hilfsmittel

- Für die Abiturprüfung 2009 sind zugelassen:
 - Gedruckte Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten. Die Formelsammlungen sind vor Ausgabe an die Schülerinnen und Schüler zu überprüfen.
 - nicht programmierbare wissenschaftliche Taschenrechner.
- In der Abiturprüfung 2009 sind **nicht** zugelassen:
 - Schulinterne eigene Druckwerke, mathematische Fachbücher und mathematische Lexika
 - Computeralgebrasysteme
 - Taschenrechner, die über eines der folgenden Leistungsmerkmale verfügen:
 - Erstellen von Wertetabellen
 - Darstellen von Funktionsgraphen
 - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
 - Numerisches Integrieren oder Differenzieren
 - Rechnen mit Matrizen und Vektoren

6 Hinweise zur Aufgabenauswahl durch die Lehrkraft / den Prüfling

Die beiden Aufgaben zur Analysis (Aufgabe 1 und Aufgabe 2) sind verbindlich zu bearbeiten. Von den Aufgaben zur Linearen Algebra / Analytischen Geometrie (Aufgabe 3) und zur Stochastik (Aufgabe 4) wählt die Fachlehrerin/der Fachlehrer eine Aufgabe zur Bearbeitung aus.

Somit erhalten die Schülerinnen und Schüler drei voneinander unabhängig lösbare Prüfungsaufgaben zur Bearbeitung. Sie erhalten keine Aufgaben zur Auswahl.

Die schriftliche Prüfung dauert gemäß § 17 Anlage D, APO-BK, viereinviertel Zeitstunden.



7 Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

7.1 Allgemeine Hinweise

Die Bewertung erfolgt anhand des folgenden Bewertungsschemas.

Als Grundlage einer kriteriengeleiteten Beurteilung werden zu erbringende Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln. Die Lösungserwartungen dienen der Orientierung der Korrektoren und sind nicht als exakte Vorformulierungen von Schülerlösungen zu verstehen. Zusätzliche Leistungen sind angemessen zu berücksichtigen. Dies betrifft etwa Lösungen, die bei den Lösungserwartungen nicht aufgeführt sind, aber dennoch richtige Lösungen sind.

Die Anordnung der Kriterien folgt einer plausiblen logischen Abfolge von Lösungsschritten, die aber keineswegs allgemein vorausgesetzt werden kann und soll.

Die kleinste Einheit zur Bewertung der erbrachten Schülerleistung im Rahmen der kriteriellen Leistungserfassung ist 1 Punkt. Dementsprechend können nur ganze Punkte vergeben werden.

Die Teilleistungen werden den in Teil I der Bildungspläne definierten Anforderungsbereichen I bis III zugeordnet. Danach werden den Lösungen der Teilaufgaben Punkte zugewiesen, die den Schwierigkeitsgrad, die Komplexität und den Zeitaufwand für die Bearbeitung der einzelnen Teilaufgabe repräsentieren. Die für jede Teilleistung angegebenen Punktwerte entsprechen einer maximal zu erwartenden Lösungsqualität. Hinzu kommt die Art der Bearbeitung in den verschiedenen Anforderungsbereichen, wobei Aspekte der Qualität, Quantität und der Darstellungsweise berücksichtigt werden.

Inhaltliche Leistungen und Darstellungsleistungen werden gesondert ausgewiesen und gehen mit fachspezifischer Gewichtung in die Gesamtwertung ein.

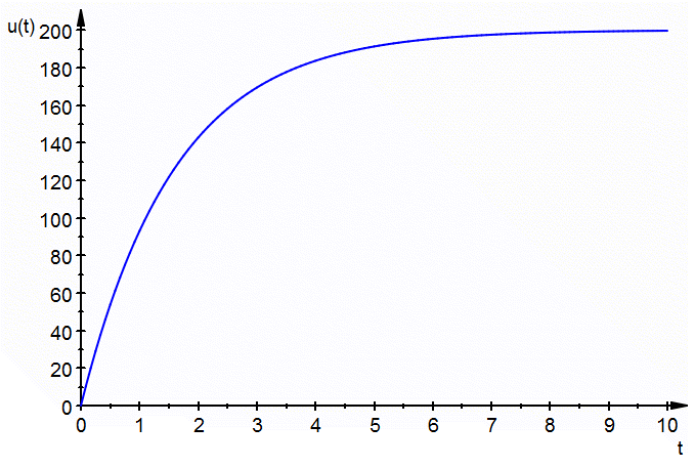
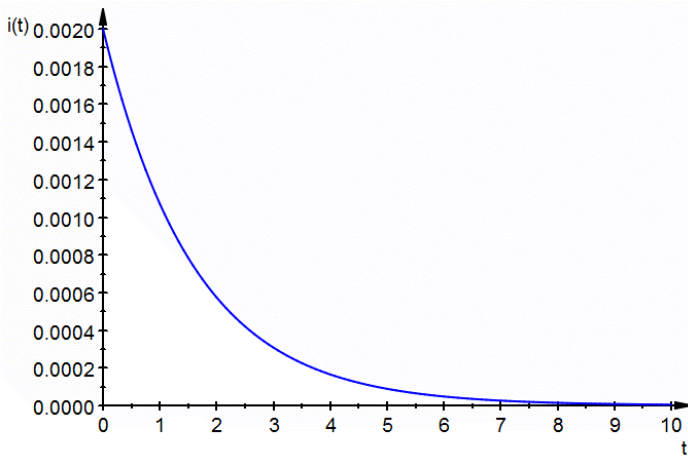
Die inhaltlichen Leistungen werden aufgabenbezogen, die Darstellungsleistungen aufgabenübergreifend bewertet.

Die Entscheidung über eine Absenkung der Bewertung aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (§ 8 Abs. 3 APO-BK) wird im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen und der Darstellungsleistung getroffen. Schwerwiegende und gehäufte Verstöße führen zu einem Abzug von 1 bis 2 Punkten bei der Leistungsbewertung den entsprechend der Lösungsqualität jeweils tatsächlich erreichten Punktwert für die Teilleistung in der Bandbreite von 0 bis zur vorgegebenen Höchstpunktzahl ein.



7.2 Erfassung der Teilleistungen

a) inhaltliche Leistung

Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforderungs- bereiche und Punkte			Bewertung	
				I	II	III	Erst- Korrektur	Zweit- Korrektur
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung					
1	1.1		 	7				
	1.2		$i(t) = \frac{1}{500} \cdot e^{-\frac{5}{8}t}$ $i'(t) = -\frac{1}{800} \cdot e^{-\frac{5}{8}t}$ <p>Für die Tangente gilt:</p> $a(t) = m \cdot t + b$					



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte			Bewertung	
				I	II	III	Erst- Korrektur	Zweit- Korrektur
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung					
			$m = i'(0) = -\frac{1}{800}$ $i(0) = \frac{1}{500}$ <p>Die Tangente geht also durch den Punkt $P(0 0,002)$. Folglich gilt:</p> $a(t) = -\frac{1}{800} \cdot t + \frac{1}{500}$ <p>Nullstelle von a:</p> $a(t_1) = 0$ $-\frac{1}{800} t_1 + \frac{1}{500} = 0$ $t_1 = 1,6$ <p>Also gilt $\tau = 1,6$ und damit $5\tau = 8$</p> $u(8) = 198,65$ <p>Die tatsächliche Spannung beträgt also 99,3% des Maximalwertes. (Prozentangabe nicht zwingend, auch Vergleich der Zahlenwerte denkbar.)</p>					
	1.3		$\bar{i} = \frac{1}{5} \int_0^5 i(t) dt$ $= -\frac{1}{2500} \cdot \frac{8}{5} e^{\frac{5}{8}t} \Big _0^5$ $= -\frac{2}{3125} e^{\frac{25}{8}} + \frac{2}{3125}$ $= 0,612 \cdot 10^{-3}$ <p>Die mittlere Stromstärke beträgt 0,612 mA.</p>	4	5			
	1.4		$p(t) = u(t) \cdot i(t)$ <p>hier:</p>					

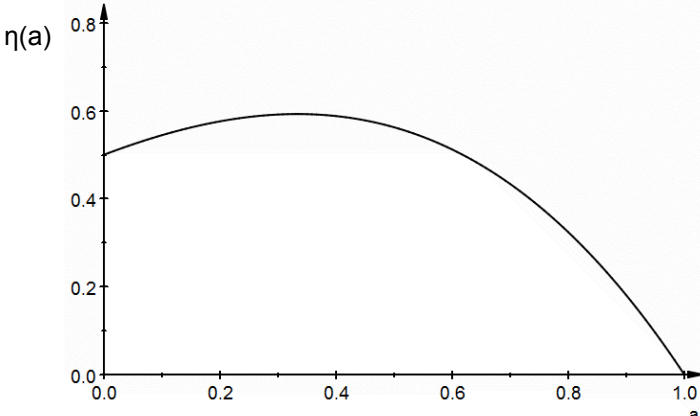


Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte			Bewertung	
				I	II	III	Erst- Korrektur	Zweit- Korrektur
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung					
			$p(t) = 200 \cdot (1 - e^{-\frac{5}{8}t}) \cdot \frac{1}{500} \cdot e^{-\frac{5}{8}t}$ $= \frac{2}{5} \cdot e^{-\frac{5}{8}t} - \frac{2}{5} \cdot e^{-\frac{5}{4}t}$ $p'(t) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{5}{8}t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{5}{4}t}$ $p''(t) = \frac{5}{32} \cdot e^{-\frac{5}{8}t} - \frac{5}{8} \cdot e^{-\frac{5}{4}t}$ $p'(t) = 0$ $-\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{5}{8}t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{5}{4}t} = 0$ $\Leftrightarrow -e^{-\frac{5}{8}t} + 2 \cdot e^{-\frac{5}{4}t} = 0$ $\Leftrightarrow 2 \cdot e^{-\frac{5}{4}t} = e^{-\frac{5}{8}t}$ $\Leftrightarrow 2 = e^{\frac{5}{8}t}$ $\Leftrightarrow \ln(2) = \frac{5}{8}t$ $t_E = \frac{8}{5} \ln(2)$ $p''(\frac{8}{5} \ln(2)) = -\frac{5}{64} < 0 \text{ also Maximum}$ $p(\frac{8}{5} \ln(2)) = 0,1$ <p>Nach 1,11s nimmt die Leistung mit 0,1 W ihren maximalen Wert an.</p>	3	6			
1.5			Es gilt: $W = \lim_{t_E \rightarrow \infty} \int_0^{t_E} p(t) dt$					



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte			Bewertung	
				I	II	III	Erst- Korrektur	Zweit- Korrektur
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung					
			$p(t) = u(t) \cdot i(t)$ $p(t) = \frac{U_0^2}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ $= \frac{U_0^2}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{U_0^2}{R} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}}$ $P(t) = -RC \frac{U_0^2}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{RC}{2} \frac{U_0^2}{R} \cdot e^{-\frac{2t}{RC}}$ $= -CU_0^2 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{2} CU_0^2 \cdot e^{-\frac{2t}{RC}}$ $= \frac{1}{2} CU_0^2 (e^{-\frac{2t}{RC}} - 2e^{-\frac{t}{RC}})$ $\int_0^{t_E} p(t) dt = P(t) \Big _0^{t_E}$ $= \frac{1}{2} CU_0^2 (e^{-\frac{2t_E}{RC}} - 2e^{-\frac{t_E}{RC}}) + \frac{1}{2} CU_0^2$ $W = \lim_{t_E \rightarrow \infty} \int_0^{t_E} p(t) dt$ $= \lim_{t_E \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} CU_0^2 (e^{-\frac{2t_E}{RC}} - 2e^{-\frac{t_E}{RC}}) + \frac{1}{2} CU_0^2 \right)$ $= \frac{1}{2} CU_0^2 (0 - 2 \cdot 0) + \frac{1}{2} CU_0^2$ $= \underline{\underline{\frac{1}{2} CU_0^2}}$					
			Summe Aufgabe 1	45		10		



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte			Bewertung	
				I	II	III	Erst- korrektur	Zweit- korrektur
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung					
2	2.1		Grenzwert: völliger Stillstand der Luft $v_2 \rightarrow 0 \Rightarrow a=0$ bis zu keiner Verzögerung der Luft $v_1=v_2 \Rightarrow a=1$ Daher: $D =]0;1]$		5	2		
	2.2			6				
	2.3		$\eta(a) = -\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$ <p>Ableitungen</p> $\eta'(a) = -\frac{3}{2}a^2 - a + \frac{1}{2}$ $\eta''(a) = -3a - 1$ <p>Notwendige Bedingung</p> $\eta'(a) = 0 = -\frac{3}{2}a^2 - a + \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow 0 = a^2 + \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}$ $\Rightarrow a_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}}$ $\Rightarrow a_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}$ $\Rightarrow a_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}$ $\Rightarrow a_1 = -1 \vee a_2 = \frac{1}{3}$ <p>Da $a_1 \notin D$ Untersuchung nur an der Stelle a_2.</p>					



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte			Bewertung	
				I	II	III	Erst- korrektur	Zweit- korrektur
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung					
			<p>Hinreichende Bedingung</p> $\eta''\left(\frac{1}{3}\right) = -3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -2 < 0 \Rightarrow \text{relatives Maximum}$ <p>Maximaler Wirkungsgrad</p> $\eta\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{16}{27} \approx 0,59$ <p>Der maximale Wirkungsgrad des Windrades be- trägt 59%</p> <p>(Bemerkung: Dieser Wert ist in der Literatur als Grenzwert von Betz bekannt)</p>	4	6			
	2.4		$\eta(a) = -\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$ $\eta'(a) = -\frac{3}{2}a^2 - a + \frac{1}{2}$ $\eta''(a) = -3a - 1$ $\eta'''(a) = -3$ <p>Notwendige Bedingung</p> $\eta''(a) = 0 = -3a - 1$ $a_w = -\frac{1}{3} \notin D$ <p>Hinreichende Bedingung</p> $\eta'''(-\frac{1}{3}) = -3 \neq 0$ <p>Die Wendestelle ist $a_w = -\frac{1}{3}$.</p>	4	5			



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte			Bewertung	
				I	II	III	Erst- korrektur	Zweit- korrektur
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung					
	2.5		<p>Für den diskreten Fall gilt:</p> $\bar{\eta}^* = \frac{1}{n}(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i = \frac{1}{n \cdot \Delta x} \sum_{i=1}^n \eta_i \cdot \Delta x$ <p>Dies entspricht einer äquidistanten Zerlegung des Intervalls $[a_1; a_2]$. Dabei gelte: $n \cdot \Delta x = a_2 - a_1$.</p> <p>Für $n \rightarrow \infty$ und damit $\Delta x \rightarrow 0$ erhält man:</p> $\bar{\eta} = \frac{1}{a_2 - a_1} \cdot \int_{a_1}^{a_2} \eta(a) da$ <p>(Konvergenzbetrachtungen werden nicht erwartet.)</p> <p>Die Berechnung des Wertes ergibt sich durch die Integration von</p> $\eta(a) = -\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$ <p>Sei $H(a)$ die Stammfunktion von $\eta(a)$:</p> $H(a) = -\frac{1}{8}a^4 - \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}a$ $\bar{\eta} = \frac{\int_{0,2}^{0,6} \eta(a) da}{0,6 - 0,2} = \frac{[H(a)]_{0,2}^{0,6}}{0,6 - 0,2}$ $\approx \frac{0,229}{0,4} \approx 0,573$					
			Summe Aufgabe 2		2	11		
					45			

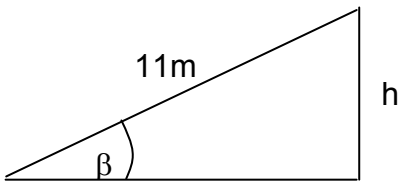


Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte			Bewertung	
				I	II	III	Erst- korrektur	Zweit- korrektur
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung					
3	3.1		<p>Der Stützvektor und die Richtungsvektoren ergeben sich direkt aus den gegebenen Punkten.</p> $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>Mit den Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v}. Um die Koordinatenform der Ebenengleichung zu erhalten, bestimmt man zunächst die Normalenform der Ebenengleichung. Dazu berechnet man den Normalenvektor \vec{n} mittels Vektorprodukt der Richtungsvektoren.</p> $\vec{n}^* = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ wähle also } \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ wobei sich die-}$ <p>ser Vektor auch ablesen lässt. Daraus ergibt sich sofort die Koordinatenform aus $\vec{n} \cdot \vec{x} = 20$ zu $x_3 = 20$.</p>	5	3			
	3.2		<p>Um die Gerade durch die Punkte P_1 und Q_1 zu bestimmen, muss der Richtungsvektor der Geraden bestimmt aus der Differenz der Ortsvektoren berechnet werden. Für die Gerade g_T „der Treppe“ ergibt sich:</p> $g_T: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$ <p>Die Gerade g schneidet E_1, die horizontal liegt, im Punkt P_1. Damit muss der Winkel zwischen E_1 und g berechnet werden. Zur weiteren Berechnung werden der Normalenvektor der Ebenen und der Richtungsvektor der Geraden benötigt.</p>					



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte			Bewertung	
				I	II	III	Erst- korrektur	Zweit- korrektur
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung					
			$\sin \alpha = \frac{ \vec{n} \cdot \vec{u} }{ \vec{n} \cdot \vec{u} } = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 13 \\ 0 & 12 \\ 1 & 18 \end{vmatrix}}{\sqrt{637}} \approx 0,7132$ $\alpha \approx 45,49^\circ$ <p>Der Winkel beträgt etwa 45,49°.</p>	5	3			
	3.3		<p>Um den Neigungswinkel der Plattform zu bestimmen, muss deren Normalenvektor \vec{n}_2 ermittelt werden.</p> $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -1,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 40 \end{pmatrix}$ <p>Der Winkel zwischen diesem Normalenvektor und dem Normalenvektor von E_1 ist der gesuchte Neigungswinkel.</p>					



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte			Bewertung	
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III	Erst- korrektur	Zweit- korrektur
			$\cos \beta = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1640}} \approx 0,9877$ $\beta \approx 8,98^\circ$ <p>Der Neigungswinkel der Plattform beträgt also ca. 9°.</p> <p>Berechnung des maximalen Höhenunterschieds</p>  $\sin(\beta) = \frac{h}{11}, \text{ damit ergibt sich } h \approx 1,72$ <p>Der maximale Höhenunterschied beträgt 1,72 m.</p>		4	8		
	3.4		<p>Um zu ermitteln, wie viel m^2 Stoff zum Verhüllen benötigt wird, muss die Oberfläche der Pyramide berechnet werden. Es reicht, eine Dreiecksfläche zu berechnen, weil der Tetraeder vier gleich große Flächen besitzt. Die Fläche lässt sich mit Hilfe des Betrags des Vektorprodukts berechnen.</p> $A_3 = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \cdot \left \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 30 \\ 52 \\ 0 \end{pmatrix} \right = \frac{1}{2} \cdot \left \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3120 \end{pmatrix} \right $ $= 1560$ <p>Da 4 Seitenflächen vorhanden sind benötigt der</p>					



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte			Bewertung	
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III	Erst- korrektur	Zweit- korrektur
			Künstler 6240 m ² Stoff. Wird mit der Kantenlänge von 60m die Fläche eines Dreiecks elementargeometrisch berechnet, so erhält man einen Wert von ca. 6235,4 m ² .	4	4			
	3.5		Um die Öffnung zu bestimmen, muss der Durchstoßpunkt der Geraden, auf der die Treppe liegt, mit der Ebene E ₃ ermittelt werden. Die Ebene ist durch die Gleichung x ₃ =8 bestimmt. Für die Gerade ergibt sich $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 33 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -32 \\ -26 \\ 20 \end{pmatrix}$ Den Parameter λ für den Schnittpunkt erhält man durch Einsetzen in die Koordinatengleichung: 20 · λ = 8. Einsetzen in die Geradengleichung ergibt einen Schnittpunkt von S(37,2 22,6 8). An dieser Stelle muss die Öffnung angebracht werden. Alternativ kann auch mit der Parameterdarstellung der Ebene gerechnet werden. Die Rechnung ist etwas aufwendiger.					
			Summe Auswahlaufgabe 3	45				

			Summe Aufgabe 1	45		
			Summe Aufgabe 2	45		
			Summe Auswahlaufgabe 3	45		
			Summe Aufgabe 1, 2 und 3	135		



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte			Bewertung	
				I	II	III	Erst- korrektur	Zweit- korrektur
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung					
4	4.1		<p>Keine Festplatte fällt aus:</p> $p = 0,8641^9 = 0,2686$ <p>Genau eine Festplatte fällt aus:</p> $p = \binom{9}{1} \cdot 0,8641^8 \cdot (1 - 0,8641)^1 =$ $9 \cdot 0,3108 \cdot 0,1359 = 0,3802$ <p>Zwei oder mehrere Festplatten fallen aus:</p> $p = 1 - 0,2686 - 0,3802 = 0,3512$ <p>Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,3512.</p>	5	2			
	4.2		<p>Es handelt sich um eine Binomialverteilung, da das Ausfallen von n Festplatten eines RAID-Systems als n aufeinanderfolgende unabhängige Bernoulli-Experimente gedeutet werden können, die jeweils nur zwei Ausgänge haben.</p> <p>Damit: $E(X) = n \cdot p$ und $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$.</p> <p>Ausfallwahrscheinlichkeit: $p = 1 - 0,8641 = 0,1359$</p> <p>$E(X) = 9 \cdot 0,1359 = 1,2231$,</p> <p>$V(X) = 9 \cdot 0,1359 \cdot 0,8641 \approx 1,05688$</p>	5	2			
	4.3		<p>Wahrscheinlichkeit, dass das RAID ausfällt (also mindestens zwei Platten ausfallen):</p> $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) =$ $1 - \binom{9}{0} \cdot 0,0004^0 \cdot (1 - 0,0004)^9 - \binom{9}{1} \cdot 0,0004^1 \cdot (1 - 0,0004)^8 \approx 0,000005749$ <p>Die Wahrscheinlichkeit ist also sehr gering.</p> <p>Bei der herkömmlichen Methode liegt das Risiko,</p>					



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte			Bewertung																	
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III	Erst- korrektur	Zweit- korrektur																
			innerhalb dieses einen Tages alle Daten zu verlie- ren, bei $p = 0,0004$ $0,0004 : 0,000005749 \approx 69,58$ Bei der herkömmlichen Methode ist das Risiko, in- nerhalb eines Tages alle Daten zu verlieren, fast 70-mal höher als beim RAID-System.	4	6																			
	4.4		Gegenereignis „keine defekte“: $P(\text{„wenigstens 1 defekte Festplatte“}) =$ $1 - P(\text{„keine defekte Festplatte“}) = 1 - 0,985^n$ $1 - 0,985^n > 0,99 \Rightarrow n \cdot \ln(0,985) < \ln(0,01)$ $\Rightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,985)} \approx 304,70$ Es müssen also mindestens 305 Festplatten ent- nommen werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,99 mindestens eine defekte Festplatte zu erhalten.		4	6																		
	4.5		D: Festplatte ist defekt A: Festplatte wird ausgesondert $P(D) = 0,015$ $P(\bar{D} \cap A) = 0,012$ $P(\bar{A}) = 0,98$ Hieraus folgt: $P(\bar{D}) = 0,985$ und $P(A) = 0,02$ Damit ergibt sich die Vier-Felder-Tafel: <table><tr><td></td><td>A</td><td>\bar{A}</td><td></td></tr><tr><td>D</td><td>0,008</td><td>0,007</td><td>0,015</td></tr><tr><td>\bar{D}</td><td>0,012</td><td>0,973</td><td>0,985</td></tr><tr><td></td><td>0,02</td><td>0,98</td><td>1</td></tr></table> Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Festplatte defekt ist und ausgesondert wird ist also:		A	\bar{A}		D	0,008	0,007	0,015	\bar{D}	0,012	0,973	0,985		0,02	0,98	1					
	A	\bar{A}																						
D	0,008	0,007	0,015																					
\bar{D}	0,012	0,973	0,985																					
	0,02	0,98	1																					



Aufgabe	Teilaufgaben	Leistungs- kriterien	Anforderung	Anforde- rungs- bereiche und Punkte			Bewertung	
			Aufgabenstellung und mögliche Lösung	I	II	III	Erst- korrektur	Zweit- korrektur
			<p>$P(D \cap A) = 0,008$.</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit mit der eine defekte Festplatte tatsächlich ausgesondert wird, beträgt:</p> $P_D(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0,008}{0,015} \approx 0,53$					
			Summe Aufgabe 4	45				

			Summe Aufgabe 1	45		
			Summe Aufgabe 2	45		
			Summe Auswahlaufgabe 4	45		
			Summe Aufgabe 1, 2 und 4	135		



b) Darstellungsleistung (aufgabenübergreifend)

	Kriterien zur Erfassung der Darstellungsleistung	Lösungs- qualität und Punkte	Bewertung	
			Erst- korrektur	Zweit- korrektur
	Die Schülerin / der Schüler			
1	Strukturierte Darstellung und Beschreibung des Lösungsweges <ul style="list-style-type: none"> – gliedert die Lösung sachlogisch (ein „roter Faden“ ist erkennbar). – stellt den Lösungsweg nachvollziehbar und stringent dar. – bezieht Bild- oder Textquellen sowie sonstige Materialien sinnvoll und angemessen zur Erläuterung des Lösungsweges ein. 	4		
2	Qualität der äußeren Form und Einhaltung formaler Regeln <ul style="list-style-type: none"> – stellt Inhalte bzw. Ergebnisse übersichtlich und gut lesbar dar. – berücksichtigt formale Darstellungsregeln bei der Lösung in angemessener Weise 	4		
3	Verwendung von Fachsprache und Fachsymbolik <ul style="list-style-type: none"> – verwendet Fachbegriffe problemgerecht – setzt fachliche Symbole, Formeln, Maßeinheiten sachgerecht ein 	4		
4	Qualität der Zeichnungen, Grafiken und Tabellen <ul style="list-style-type: none"> – stellt die Zeichnungen, Grafiken u. ä. übersichtlich, normgerecht und bildlich korrekt dar. – fertigt Zeichnungen, Grafiken u. ä. entsprechend den Anforderungen des Faches an. 	3		
	Summe Darstellungsleistung	15		
	Gesamtsumme aus 7.2a und 7.2b	150		

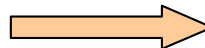


7.3 Bewertung (Notenfindung)

Notenfindung

% - Anteil erbrachter Leistung		Noten-Punkte	Notenstufen	Rohpunkte	
von	bis unter			von	bis
95%	100%	15	sehr gut plus	143	150
90%	95%	14	sehr gut	135	142
85%	90%	13	sehr gut minus	128	134
80%	85%	12	gut plus	120	127
75%	80%	11	gut	113	119
70%	75%	10	gut minus	105	112
65%	70%	9	befriedigend plus	98	104
60%	65%	8	befriedigend	90	97
55%	60%	7	befriedigend minus	83	89
50%	55%	6	ausreichend plus	75	82
45%	50%	5	ausreichend	68	74
39%	45%	4	ausreichend minus	58	67
32%	39%	3	mangelhaft plus	49	57
26%	32%	2	mangelhaft	40	48
20%	26%	1	mangelhaft minus	30	39
0%	20%	0	ungenügend	0	29

maximal erreichbare Gesamtpunktzahl



150

	Erstkorrektur	Zweitkorrektur
Notenpunkte		

