



**BERUFSKOLLEG**  
Berufliches Gymnasium

# **Zentrale Abiturprüfung 2010**

## **Weiterer Leistungskurs Mathematik**

**Fachbereich Informatik**



## 1 Konstruktionsmerkmale der Aufgabe

Aufgaben	Aufgabenarten
Aufgabe 1	Stochastik: Speicherkarte einer Digitalkamera
Aufgabe 2	Lineare Algebra/Analytische Geometrie/Zahlentheorie: Variationen eines Bildschirmschoners mit Hilfe der analytischen Geometrie
Auswahlaufgabe 3 (ohne CAS)	Analysis: Grafikkarte
Auswahlaufgabe 4 (mit CAS)	Analysis: Verbreitung eines Computervirus

## 2 Aufgabenstellung (vgl. Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler)

## 3 Materialgrundlage

entfällt

## 4 Bezüge zu den Abiturvorgaben 2010

### Aufgabe 1 Stochastik

Grundlegende Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Ergebnis, Ereignis, Wahrscheinlichkeit nach Laplace, Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln, Zählstrategien (Allgemeines Zählprinzip, Binomialkoeffizient, n-Fakultät)
- Zufallsgrößen, Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Bedingte Wahrscheinlichkeit, Baumdiagramme
- Binomialverteilung
- Kenngrößen der Binomialverteilung,
- Hypothesentest

### Aufgabe 2 Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Zahlentheorie

- Geraden und Ebenen im  $\mathbb{R}^3$   
Darstellungsformen von Geraden und Ebenen  
Schnittpunkte und Schnittgeraden
- Grundlagen der Matrizenrechnung  
Elementare Matrizenoperationen  
Lineare Abbildungen und ihre Verkettungen  
Abbildungsmatrizen und affine Abbildungen  
Umkehrbare Abbildungen und inverse Matrizen
- Gruppen, Ringe und Körper



### Aufgabe 3 Analysis

- Funktionsklassen ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen und deren Verknüpfungen

Funktionseigenschaften: Kurvenscharen und Parameter in Funktionsvorschriften, Abschnittsweise definierte Funktionen, Differenzierbarkeit und Stetigkeit, Ableitungsregeln, Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte, Extremwertprobleme

Integration: Umgang mit Integralfunktionen Bestimmung von Stammfunktionen

### Aufgabe 4 Analysis

- Funktionsklassen ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen und deren Verknüpfungen

Funktionseigenschaften: Kurvenscharen und Parameter in Funktionsvorschriften, Abschnittsweise definierte Funktionen, Differenzierbarkeit und Stetigkeit, Ableitungsregeln, Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte, Extremwertprobleme

Aufstellen von Funktionsgleichungen aus Bedingungen

Integration: Umgang mit Integralfunktionen Bestimmung von Stammfunktionen

## 5 Zugelassene Hilfsmittel

- Für die Abiturprüfung 2010 sind zugelassen:
  - Gedruckte Formelsammlungen der Schulbuchverlage, die keine Beispielaufgaben enthalten. Die Formelsammlungen sind vor Ausgabe an die Schülerinnen und Schüler zu überprüfen.
  - Tabellierte kumulierte Binomialverteilung, s. Anhang dieses Dokumentes,
  - nicht programmierbare wissenschaftliche Taschenrechner.
- In der Abiturprüfung 2010 sind **nicht** zugelassen:
  - Schulinterne eigene Druckwerke, mathematische Fachbücher und mathematische Lexika
  - Computeralgebrasysteme (außer für die alternative Aufgabe aus dem Sachgebiet Analysis (siehe Punkt 6)),
  - Taschenrechner, die über eines der folgenden Leistungsmerkmale verfügen:
    - Darstellen von Funktionsgraphen
    - Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
    - Numerisches Integrieren oder Differenzieren
    - Rechnen mit Matrizen und Vektoren
- In der Abiturprüfung 2010 sind nur für die alternative Aufgabe aus dem Sachgebiet Analysis (siehe Punkt 6) Computeralgebrasysteme als weiteres erforderliches Hilfsmittel zugelassen.

Das eingesetzte CAS sollte mindestens folgende Funktionen umfassen

- Wertetabellen erstellen
- algebraische Ausdrücke vereinfachen und vergleichen
- algebraische Gleichungen lösen
- lineare Gleichungssysteme lösen und Matrizenberechnung durchführen
- Funktionen algebraisch differenzieren und integrieren
- Funktionen und Daten zweidimensional graphisch darstellen



## 6 Hinweise zur Aufgabenauswahl durch die Lehrkraft / den Prüfling

Für die Abiturprüfung 2010 erhält die Schule insgesamt vier Aufgaben:

- insgesamt zwei Aufgaben (Aufgabe 1 und 2) aus den Themengebieten Lineare Algebra/Analytische Geometrie, Stochastik, Zahlentheorie,
- zwei Aufgaben zur Analysis.

Die beiden Aufgaben aus den Themengebieten Lineare Algebra/Analytische Geometrie, Stochastik, Zahlentheorie sind verbindlich zu bearbeiten.

Von den beiden Aufgaben zur Analysis wählt die Fachlehrerin/der Fachlehrer eine Aufgabe zur Bearbeitung aus. Diese Aufgaben unterscheiden sich durch den Einsatz der zugelassenen Hilfsmittel.

Somit erhalten die Schülerinnen und Schüler drei voneinander unabhängig lösbare Aufgaben.

Nach einer Auswahlzeit von drei Zeitstunden teilt die Fachlehrerin / der Fachlehrer der Schulleitung schriftlich die Entscheidung mit. Diese Entscheidung wird zu den Prüfungsakten genommen. Für die Prüflinge besteht keine Aufgabenauswahl. Sie erhalten keine zusätzliche Auswahlzeit.

Sollte sich die Fachlehrerin / der Fachlehrer für die Analysis-Aufgabe **ohne** CAS-Einsatz entscheiden, so können die drei Aufgaben in der festgelegten Bearbeitungszeit insgesamt in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden.

Sollte sich die Fachlehrerin / der Fachlehrer für die Analysis-Aufgabe **mit** CAS-Einsatz entscheiden, sind folgende Hinweise zu beachten:

- Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu Beginn der Bearbeitungszeit die drei zu bearbeitenden Aufgaben.

Die Schülerinnen und Schüler geben individuell nach Bearbeitung die beiden Lösungen der Aufgaben zur Linearen Algebra / Analytischen Geometrie und Stochastik und ggf. Zahlentheorie ab. Im Gegenzug wird ihnen das Computeralgebrasystem zur Verfügung gestellt. Ein weiteres Bearbeiten der ersten zwei Aufgaben ist danach nicht mehr möglich. Die Abgabezeit für die Aufgaben 1 und 2 wird von der Fachlehrerin / dem Fachlehrer bzw. der aufsichtführenden Lehrkraft protokolliert.

- Für eine hinreichende Anzahl von Ersatzsystemen (PC's bzw. Handhelds) ist zu sorgen.
- Alle Systeme sind vor der Prüfung in den Urzustand zu versetzen. Zusätzliche Tools bzw. ergänzende Programme sind auf den Systemen nicht zulässig. Die Schule stellt sicher, dass keine Verbindung der Systeme untereinander sowie keine Verbindung der Systeme zum Internet vorhanden sind.
- Der Lösungsweg ist von den Schülerinnen und Schülern in der Reinschrift textlich so zu dokumentieren, dass der Gedankengang der Problemlösung vollständig nachvollziehbar ist. Die Dokumentation ist integraler Bestandteil der Problemlösung und geht in die Bewertung der Prüfungsleistung ein.
- Wird der Computer zum Editieren von Aufgabenlösungen benutzt, muss der Prüfling zum Abschluss einen Computerausdruck seines Lösungstextes durch Unterschrift autorisieren. Die Erstellung des Computerausdrucks ist von der Schule innerhalb der Gesamtbearbeitungszeit so zu organisieren, dass beim Abgeben der Prüfungsarbeit der unterschriebene Ausdruck vorliegt. Nur der autorisierte Ausdruck ist Bestandteil der Prüfungsarbeit; die elektronische Version (Datei) kann nicht zur Korrektur oder Bewertung herangezogen werden.
- Die verwendete Technologie muss in den Prüfungsakten von der Fachlehrerin / dem Fachlehrer mit Angabe des verwendeten Computeralgebrasystems bzw. Handheld-Typs mit der Version bzw. Versionsnummer vermerkt werden.



## 7 Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

### Teilleistungen – Kriterien

#### a) inhaltliche Leistung

#### Aufgabe 1

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	<b>Hinweis: Alternative Lösungen sind bei allen Teilaufgaben zulässig.</b>	
<b>1.1</b>		
<b>1.1.1</b>	<b>...bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Speicherkarte defekt ist.</b>	
	$E_1$ : Eine Speicherkarte ist defekt. $p(E_1) = 0,4 \cdot 0,02 + 0,35 \cdot 0,03 + 0,25 \cdot 0,05 = 0,031$	<b>3(I)</b>
<b>1.1.2</b>	<b>...bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Speicherkarte auf der Produktionsanlage B produziert wurde und nicht defekt ist.</b>	
	$E_2$ : Eine Speicherkarte wurde auf Anlage B produziert und ist nicht defekt. $p(E_2) = 0,35 \cdot 0,97 = 0,3395$	<b>3(I)</b>
<b>1.1.3</b>	<b>...untersucht, von welcher der drei Anlagen die defekte Speicherkarte mit der höchsten Wahrscheinlichkeit stammt.</b>	
	$E_{3/1}$ : Eine defekte Speicherkarte stammt von Anlage A. $p(E_{3/1}) = \frac{0,4 \cdot 0,02}{0,031} \approx 0,2581$ $E_{3/2}$ : Eine defekte Speicherkarte stammt von Anlage B. $p(E_{3/2}) = \frac{0,35 \cdot 0,03}{0,031} \approx 0,3387$ $E_{3/3}$ : Eine defekte Speicherkarte stammt von Anlage C. $p(E_{3/3}) = \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,031} \approx 0,4032$ Die Speicherkarte stammt mit der höchsten Wahrscheinlichkeit aus Anlage C.	<b>8(II)</b>
<b>1.2</b>	<b>...zeigt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 86,27% mehr als 2 der verkauften Karten aus der Produktion von Anlage A stammen.</b>	
	$E_4$ : Mehr als 2 Speicherkarten stammen von Anlage A. $p(E_4) = 1 - \frac{\binom{12}{0}\binom{8}{6} + \binom{12}{1}\binom{8}{5} + \binom{12}{2}\binom{8}{4}}{\binom{20}{6}} \approx 0,8627$	<b>7(III)</b>



	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1.3		
1.3.1	<b>...bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schachtel genau vier...</b>	
	X ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0,02$ . $P(X = 4) = B(50; 0,02; 4) = 0,0146$	<b>2(I)</b>
1.3.2	<b>...höchstens zwei</b>	
	$P(X \leq 2) = B(50; 0,02; 0) + B(50; 0,02; 1) + B(50; 0,02; 2) =$ $= F(50; 0,02; 2) \approx 0,9216$	<b>3(I)</b>
1.3.3	<b>...mehr als 5 unbrauchbare Speicherkarten enthält.</b>	
	$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(50; 0,02; 5) = 1 - 0,9995 \approx 0,0005$	<b>3(I)</b>
1.4	<b>...zeigt, dass mindestens 80 Speicherkarten kontrolliert werden müssen, um mit wenigstens 80% Wahrscheinlichkeit mindestens eine fehlerhafte Speicherkarte zu finden.</b>	
	X sei die Anzahl der fehlerfreien Speicherkarten. X ist binomialverteilt mit $p = 0,02$ $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,98^n \geq 0,8$ $1 - 0,98^n \geq 0,8 \Leftrightarrow n \geq 79,66$ Ab $n = 80$	<b>6(III)</b>
1.5	<b>...untersucht, wie viele fehlerhafte Speicherkarten der Großhändler dann mindestens vorfinden müsste.</b>	
	$H_0 : p \leq 0,02$ $H_1 : p > 0,2$ Stichprobenumfang $n = 500$ und Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,05$ X sei die Anzahl fehlerhafter Speicherkarten. X ist bei wahrer Nullhypothese binomialverteilt mit $p = 0,02$ und $n = 500$ . $\mu = 500 \cdot 0,02 = 10$ und $\sigma = \sqrt{500 \cdot 0,02 \cdot 0,98} = 3,13 > 3$ (Laplace-Bedingung erfüllt) Da sehr große Werte von X gegen $H_0$ sprechen, handelt es sich um einen rechtsseitigen Test. $A = \{0; 1; \dots; g-1\}$ sei der Annahmebereich von $H_0$ .	<b>10(II)</b>



	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	<p><math>K = \{g; g+1; \dots; 50\}</math> sei der Ablehnungsbereich von <math>H_0</math>.</p> <p><math>\mu + 1,64 \cdot \sigma = 15,133 &lt; 16 = g \Rightarrow P(X \geq 16) \leq 0,05</math>.</p> <p>Damit die Behauptung zurückgewiesen werden kann, müssen mindestens 16 Speicherkarten gefunden werden.</p>	
	<b>Summe Aufgabe 1</b>	<b>45</b>



Aufgabe 2

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling...	
	<b>Hinweis: Alternative Lösungen sind bei allen Teilaufgaben zulässig.</b>	
<b>2.1</b>		
<b>2.1.1</b>	... zeigt, dass eine Drehung um den Ursprung um einen beliebigen Winkel $\varphi$ <u>gegen</u> den Uhrzeigersinn mit Hilfe der Matrix $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ erfolgt.	
	<p>Die nachfolgenden Betrachtungen gelten für Punkte auf dem Einheitskreis. Es sei <math>\cos(\alpha) = a</math> und <math>\sin(\alpha) = b</math>. Die Drehung um <math>\varphi</math> gegen den Uhrzeigersinn bewirkt für die x-Koordinate: <math>a' = \cos(\alpha + \varphi)</math> und für die y-Koordinate entsprechend <math>b' = \sin(\alpha + \varphi)</math>. Nach den Additionstheoremen gilt:  <math>a' = \cos(\alpha + \varphi) = \cos(\alpha) \cos(\varphi) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi)</math>, bzw.  <math>b' = \sin(\alpha + \varphi) = \sin(\alpha) \cos(\varphi) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi)</math>. Und somit</p> $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cos(\varphi) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\alpha) \cos(\varphi) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	<b>6(II)</b>
<b>2.1.2</b>	...weist nach, dass mit Hilfe der Matrix $N = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ die Drehung um den Ursprung um $45^\circ$ <u>im</u> Uhrzeigersinn erfolgt.	
	<p>Da nach Voraussetzung <math>\cos(\alpha) = a</math> und <math>\sin(\alpha) = b</math> ist und  <math>\sin(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}</math> und <math>\cos(-45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}</math> ergibt sich also:</p> $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	<b>2(II)</b>





	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
2.2	<p><b>... bestimmt die Matrixdarstellung der gesamten Abbildung und den Bildpunkt B''.</b></p>	
	<p>Die Verschiebung ergibt A'(90; 10), B'(100; 10), C'(100; 30), und D'(90; 30). Nun müssen die Punkte so verschoben werden, dass der Drehpunkt im Ursprung liegt, also A''(0; 0), B''(10; 0), C''(10; 30) und D''(0; 30). Die Ortsvektoren der entsprechenden Punkte werden mit der Drehmatrix <math>T = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 \\ -1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> multipliziert. Anschließend wird mit dem Vektor <math>\vec{v} = \begin{pmatrix} 90 \\ 10 \end{pmatrix}</math> verschoben. Für die Abbildung F und <math>\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}</math>, ergibt sich:</p> $F(\vec{x}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 90 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 90 \\ 10 \end{pmatrix}$ $F\left(\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 90 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 90 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 + 5\sqrt{2} \\ 10 - 5\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 97,07 \\ 2,93 \end{pmatrix}$ <p>also B''(97,07; 2,93)</p>	4(I)
2.3	<p><b>... bestimmt den größten Wert für b.</b></p>	
	<p>Es genügt den Eckpunkt B<sub>b</sub>' zu betrachten, da dieser als erster bei einer Drehung den Rand berührt. <math>\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 \\ -1 &amp; 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 40 \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ b+20 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 30 \\ b+20 \end{pmatrix}</math></p> <p>Für die y-Komponente gilt:</p> $0 = -15 \cdot \sqrt{2} + b + 20 \text{ und damit } b = -20 + 15 \cdot \sqrt{2} = 1,213$	8(I)
2.4	<p><b>... bestimmt die Abbildungsmatrix für das Zurückdrehen des Rechtecks um den Ursprung.</b></p>	
	<p>Die Drehmatrix ist <math>B = \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) &amp; \sin(-45^\circ) \\ -\sin(-45^\circ) &amp; \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 &amp; 1 \\ -1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>.</p> <p>Die inverse Matrix <math>B^{-1} = \begin{pmatrix} a &amp; b \\ c &amp; d \end{pmatrix}</math> kann man berechnen, indem man die Gleichung <math>B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \end{pmatrix}</math> auflöst.</p> $\frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{\sqrt{2}}{2} c = 1; -\frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{\sqrt{2}}{2} c = 0; \frac{\sqrt{2}}{2} b - \frac{\sqrt{2}}{2} d = 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} b + \frac{\sqrt{2}}{2} d = 1 \text{ ergibt } a = c \text{ und } b = -d, \text{ daraus folgt schließlich } a = \frac{\sqrt{2}}{2} = c = d \text{ und } b = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ und somit } B^{-1}$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$	7(II)



	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
2.5	... bestimmt die Matrixdarstellung der Streckung und den Bildpunkt D'.	
	<p>Bestimmung des Mittelpunktes M des Rechteckes. Wegen A(30; 160), B(40; 160), C(40; 180) und D(30; 180) muss gelten M(35; 170). Nun muss man das Rechteck so verschieben, dass M im Ursprung liegt, das ergibt D*(-5; 10),</p> <p>Nun muss man die Streckmatrix <math>S = \begin{pmatrix} 1,5 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1,5 \end{pmatrix}</math> mit dem Ortsvektor des Punktes D* multiplizieren und den daraus gewonnenen Bildpunkt so verschieben, dass der Mittelpunkt des Rechteckes wieder in M liegt. Das Ergebnis lautet dann</p> $F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 35 \\ 170 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 \\ 170 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 180 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 35 \\ 170 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35 \\ 170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27,5 \\ 185 \end{pmatrix}, \text{ also } D'(27,5; 185)$	4(II)
2.6	... zeigt, dass es sich bei der Menge M der 2x2-Matrizen mit der Matrizenmultiplikation und -addition (M, +, ·) um einen Ring handelt.	
	<p>(1) (M, ·) ist eine Halbgruppe:</p> <p>Abgeschlossenheit:</p> $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \in M, \text{ mit } a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{R}$ <p>Neutrales Element: <math>\begin{pmatrix} a &amp; b \\ c &amp; d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a &amp; b \\ c &amp; d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a &amp; b \\ c &amp; d \end{pmatrix}</math></p>	4(III)
	<p>(2) (M,+) ist eine abelsche Gruppe:</p> <p>Abgeschlossenheit:</p> $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \in M, \text{ mit } a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{R}$ <p>Neutrales Element: <math>\begin{pmatrix} a &amp; b \\ c &amp; d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a &amp; b \\ c &amp; d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a &amp; b \\ c &amp; d \end{pmatrix}</math></p> <p>Inverses Element: <math>\begin{pmatrix} -a &amp; -b \\ -c &amp; -d \end{pmatrix}</math>, da <math>\begin{pmatrix} a &amp; b \\ c &amp; d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a &amp; -b \\ -c &amp; -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 \\ 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math></p> <p>Kommutativität:</p> $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	8(III)
	(3) Es gilt das Distributivgesetz:	2(III)



	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} a(e+i)+b(g+k) & a(f+j)+b(h+l) \\ c(e+i)+d(g+k) & c(f+j)+d(h+l) \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ai+bk & aj+bl \\ ci+dk & cj+dl \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$	
	<b>Summe Aufgabe 2</b>	<b>45</b>



Auswahlaufgabe 3

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	<b>Hinweis: Alternative Lösungen sind bei allen Teilaufgaben zulässig.</b>	
<b>3.1</b>	<b>... prüft rechnerisch den Sachverhalt.</b>	
	<p>Ableitungen:</p> <p>Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum:</p> $U_8'(t) = 0$ $\frac{175}{16}t^3 - \frac{525}{4}t^2 + 350t = 0$ $\Leftrightarrow t(t-4)(t-8) = 0$ $\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 4 \vee t = 8$ <p>Da <math>U_8''(4) = -175 &lt; 0</math> liegt an der Stelle <math>x = 4</math> ein lokales Maximum vor. Aus <math>U_8(4) = 700</math> folgt, dass der Normpegel die Weißschwelle von 630 mV überschreitet.</p>	<b>7(II)</b>
<b>3.2</b>		
<b>3.2.1</b>	<b>...berechnet die mittlere Änderungsrate des Spannungs-Zeit-Verlaufs für <math>U_8</math> zwischen dem Messbeginn zum Zeitpunkt <math>t = 0</math> ms und dem Erreichen des Normpegels zum Zeitpunkt <math>t = 4</math> ms.</b>	
	<p>Die mittlere Änderungsrate des Spannungs-Zeit-Verlaufs beträgt:</p> $m = \frac{U_8(4) - U_8(0)}{4 - 0} = 175$	<b>4(II)</b>
<b>3.2.2</b>	<b>... ermittelt die maximale bzw. minimale Änderungsrate des Spannungs-Zeit-Verlaufs im Zeitintervall von 0 ms bis 8 ms.</b>	
	<p>Die Änderungsrate des Spannungs-Zeit-Verlaufs ist in den Wendepunkten des Graphen der Funktion <math>U_8</math> maximal. Notwendige Bedingung für Wendestellen :</p> $U_8''(t) = 0$ $\Leftrightarrow \frac{525}{16}t^2 - \frac{525}{2}t + 350 = 0$ $\Leftrightarrow t \approx 6,31 \vee t \approx 1,69$ $U_8'''(t) = \frac{11200}{8^4} \cdot \left( \frac{1050}{16}t - \frac{525}{2} \right)$ <p>Die hinreichende Bedingung ist erfüllt, da <math>U_8'''(6,31) = 414,51</math> und <math>U_8'''(1,69) = -414,51</math> von null verschieden sind. Mit <math>U_8(6,31) = 310,95</math> und <math>U_8(1,69) = 310,95</math> ergibt sich, dass die extremalen Spannungsänderungen in den Punkten <math>W_1(1,69   310,95)</math> (maximal) und <math>W_2(6,31   310,95)</math> (minimal) vorliegen.</p>	<b>7(I)</b>
<b>3.3</b>	<b>...bestimmt für <math>U_8</math> mit einem numerischen Verfahren den Zeitpunkt, zu dem die Weißschwelle erstmalig erreicht wird.</b>	



	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	Anwendung des Newton-Verfahrens auf die Gleichung $g(t) = 0$ mit $g(t) = U_8(t) - 630$ mit dem Startwert $t_0=3$ ergibt $t_1 = 3,09$ , $t_2 = 3,093865$ , $t_3 = 3,093872$ . Ab dem Zeitpunkt $t=3,0938$ wird die Weißschwelle erstmalig überschritten.	8(II)
3.4	<b>... zeigt, dass der Wert des lokalen Maximums der Funktionenschar <math>U_k</math> unabhängig vom Parameter <math>k</math> ist.</b>	
	$U_k'(t) = \frac{22400}{k^4} \cdot (2t^3 - 3kt^2 + k^2t) ; f_k''(t) = \frac{22400}{k^4} \cdot (6t^2 - 6kt + k^2)$ <p>Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum:</p> $U_k'(t) = 0$ $\frac{22400}{k^4} \cdot (2t^3 - 3kt^2 + k^2t) = 0$ $\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{k}{2} \vee t = k$ <p>Mit <math>U_k''(\frac{k}{2}) = -\frac{11200}{k^2} &lt; 0</math> folgt, dass an der Stelle <math>t = \frac{k}{2}</math> ein lokales Maximum vorliegt.</p> <p>Es ist <math>U_k(\frac{k}{2}) = 700</math> , also unabhängig von <math>k</math>.</p>	9(III)
3.5		
3.5.1	<b>... bestimmt den Mittelwert der Spannung <math>U_k</math> in dem von den Nullstellen begrenzten Zeitintervall ...</b>	
	<p>Bestimmung der Nullstellen</p> $U_k(t) = 0$ $\Leftrightarrow \frac{11200}{k^4} \cdot (t^4 - 2kt^3 + k^2t^2) = 0$ $\Leftrightarrow t = 0 \vee t = k$ <p>Berechnung des Mittelwertes</p> $\bar{y} = \frac{1}{k} \cdot \int_0^k \frac{11200}{k^4} \cdot (t^4 - 2kt^3 + k^2t^2) dt$ $= \frac{11200}{k^5} \cdot \left[ \frac{1}{5} \cdot t^5 - \frac{k}{2} \cdot t^4 + \frac{k^2}{3} \cdot t^3 \right]_0^k = \frac{1120}{3} \approx 373,33$	7(I)
3.5.2	<b>...interpretiert das Ergebnis.</b>	
	Der berechnete Mittelwert ist unabhängig vom Parameter $k$ . Dies bedeutet also, dass bei allen Grafikkarten die mittlere Spannung identisch ist.	3(III)
	<b>Summe Auswahlaufgabe 3</b>	45

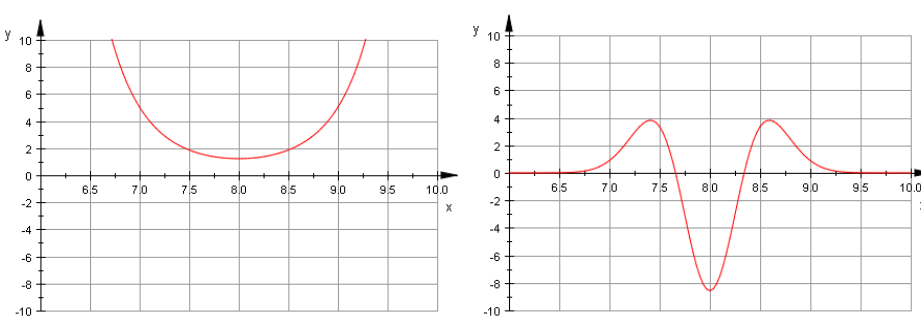




Auswahlaufgabe 4

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	Hinweis: Alternative Lösungen sind bei allen Teilaufgaben zulässig	
4.1		
4.1.1	... stellt die Funktionsgleichung für g auf.	
	Die Durchführung der linearen Regression ergibt: $g(t) \approx 12.273,12 \cdot t - 9.610,47$	3(II)
	... stellt die Funktionsgleichung für h auf.	
	Da 5 Punkte gegeben sind, wird ein Ansatz mit einer ganzrationalen Funktion 4. Grades gewählt: $h(t) = a \cdot t^4 + b \cdot t^3 + c \cdot t^2 + d \cdot t + e$ Das zu lösende lineare Gleichungssystem lautet: $e = 500$ $a + b + c + d + e = 1.000$ $81a + 27b + 9c + 3d + e = 10.000$ $256a + 64b + 16c + 4d + e = 30.000$ $625a + 125b + 25c + 5d + e = 70.000$ Die Lösung lautet: $h(t) = 50 \cdot t^4 + 558 \frac{1}{3} \cdot t^3 - 1550 \cdot t^2 + 1441 \frac{2}{3} \cdot t + 500$	5(II)
4.1.2	...begründet, welches der drei Modelle noch annähernd genau den Verlauf der Virenausbreitung beschreibt.	
	Berechnung der Anzahl der infizierten PC gemäß der 3 Modelle ergibt: $f(6) = 169.597$ $g(6) = 64.029$ $h(6) = 138.750$ Der Wert für Modell C kommt der tatsächlichen Anzahl am nächsten.	4(III)
4.1.3	...berechnet mit Hilfe des Modells C, wann über 1 Million Computer infiziert sind.	
	Ansatz: $1.000.000 < 766 \cdot e^{0,9 \cdot t}$ . Daraus folgt: $t > 7.97$	2(I)
4.2	...bestimmt diejenige Funktion $a_{r,s}$ der Schar, die einen stetigen und differenzierbaren Anschluss an den Graphen der Funktion f zum Zeitpunkt $t = 7$ liefert.	
	Der Ansatz $a_{r,s}(t) = r \cdot e^{s \cdot (t-8)^2}$ mit den beiden Bedingungen $a_{r,s}(7) = f(7)$ und $a'_{r,s}(7) = f'(7)$ liefert $r = 654.209$ und $s = -0,45$	5(II)
4.3		
4.3.1	...bestimmt den Zeitpunkt, ab dem die meisten Rechner mit Viren befallen sind.	
	Anwendung der notwendigen und hinreichenden Bedingung für lokale Maxima	4(I)



	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)																		
	Der Prüfling																			
	liefert $t = 8,0$ für die Funktion $a(t) = 674.000 \cdot e^{-0,452 \cdot (t-8)^2}$																			
4.3.2	<b>...bestimmt den Zeitpunkt, ab dem weniger als 1000 Rechner noch befallen sind.</b>																			
	Der Ansatz $a(t) = 674.000 \cdot e^{-0,452 \cdot (t-8)^2} < 1.000$ liefert innerhalb des Definitionsbe- reiches der Funktion $t > 11,80$ .	4(I)																		
4.3.3	<b>... leitet den Zeitpunkt her, zu dem die Abnahmegeschwindigkeit der Viren- ausbreitung am höchsten ist.</b>																			
	Die Zu- und Abnahmegeschwindigkeit der Virenausbreitung wird durch die Funk- tion $a'(t)$ beschrieben. Anwendung der notwendigen und hinreichenden Bedin- gung für lokale Minima liefert $t = 9,05$ .	5(III)																		
4.4																				
4.4.1	<b>...skizziert je einen Graphen pro Graphentyp</b>																			
		3(I)																		
	<b>...vergleicht die wesentlichen Merkmale/Eigenschaften der jeweiligen Typen in einer Übersicht</b>																			
	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th><th><math>s &gt; 0</math></th><th><math>s &lt; 0</math></th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Nullstellen</td><td>keine</td><td>2</td></tr> <tr> <td>Extrempunkte</td><td>1 Tiefpunkt</td><td>2 Hochpunkte, 1 Tiefpunkt</td></tr> <tr> <td>Wendepunkte</td><td>keiner</td><td>vier</td></tr> <tr> <td>Symmetrie</td><td colspan="2">Achsensymmetrie zur Geraden <math>x = 8</math></td></tr> <tr> <td>Verh. im Unend- lichen</td><td><math>f(t) \rightarrow \infty</math></td><td><math>f(t) \rightarrow 0</math></td></tr> </tbody> </table>		$s > 0$	$s < 0$	Nullstellen	keine	2	Extrempunkte	1 Tiefpunkt	2 Hochpunkte, 1 Tiefpunkt	Wendepunkte	keiner	vier	Symmetrie	Achsensymmetrie zur Geraden $x = 8$		Verh. im Unend- lichen	$f(t) \rightarrow \infty$	$f(t) \rightarrow 0$	5(III)
	$s > 0$	$s < 0$																		
Nullstellen	keine	2																		
Extrempunkte	1 Tiefpunkt	2 Hochpunkte, 1 Tiefpunkt																		
Wendepunkte	keiner	vier																		
Symmetrie	Achsensymmetrie zur Geraden $x = 8$																			
Verh. im Unend- lichen	$f(t) \rightarrow \infty$	$f(t) \rightarrow 0$																		
4.4.2	<b>...ermittelt die Ortskurve der Maxima der Funktionenschar <math>a_s''</math>.</b>																			
	Ermittlung der lokalen Maximastellen der Funktionenschar $a_s''$ liefert $x_m = 8 \pm \sqrt{\frac{3}{-2 \cdot s}}$ Umstellen nach $s$ und Einsetzen liefert dann für die Ortskurve die Funktionsgleichung: $o(x) = \frac{6 \cdot e^{-\frac{3}{2}}}{(x-8)^2}$	5(II)																		
	<b>Summe Aufgabe 4</b>	<b>45</b>																		





	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
	Summe Aufgabe 1, 2 und Auswahlaufgabe 4	135

**b) Darstellungsleistung - aufgabenübergreifend**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	stellt den Lösungsweg in strukturierter Form dar.	4
2	beachtet die Qualität der äußeren Form und hält formale Regeln ein.	4
3	verwendet Fachsprache und Fachsymbolik	4
4	fertigt Zeichnungen, Grafiken und Tabellen in angemessener Qualität an.	3
	Summe Darstellungsleistung	15

	Summe insgesamt (inhaltliche Leistung und Darstellungsleistung)	150
--	---	-----



## 8 Bewertungsbogen zur Abiturprüfung im Fach Mathematik-Informatik

Name des Prüflings: \_\_\_\_\_ Kurs: \_\_\_\_\_

Schule: \_\_\_\_\_

### Aufgabe 1

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
1.1					
1.1.1	...bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Speicherkarte defekt ist.	3(I)			
1.1.2	...bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Speicherkarte auf der Produktionsanlage B produziert wurde und nicht defekt ist.	3(I)			
1.1.3	...untersucht, von welcher der drei Anlagen die defekte Speicherkarte mit der höchsten Wahrscheinlichkeit stammt.	8(II)			
1.2	...zeigt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 86,27% mehr als 2 der verkauften Karten aus der Produktion von Anlage A stammen.	7(III)			
1.3					
1.3.1	...bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schachtel genau vier...	2(I)			
1.3.2	...höchstens zwei	3(I)			
1.3.3	...mehr als 5 unbrauchbare Speicherkarten enthält.	3(I)			
1.4	...zeigt, dass mindestens 80 Speicherkarten kontrolliert werden müssen, um mit wenigstens 80% Wahrscheinlichkeit mindestens eine fehlerhafte Speicherkarte zu finden.	6(III)			
1.5	...untersucht, wie viele fehlerhafte Speicherkarten der Großhändler dann mindestens vorfinden müsste.	10(II)			
	<b>Summe Aufgabe 1</b>	<b>45</b>			

### Aufgabe 2

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
2.1					
2.1.1	... zeigt, dass eine Drehung um den Ursprung um einen beliebigen Winkel $\varphi$ gegen den Uhrzeigersinn mit Hilfe der Matrix $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ erfolgt.	6(II)			



	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
2.1.2	...weist nach, dass mit Hilfe der Matrix $N = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ die Drehung um 45° <u>im</u> Uhrzeigersinn erfolgt.	2(II)			
2.2	... bestimmt die Matrixdarstellung der gesamten Abbildung und den Bildpunkt B''.	4(I)			
2.3	... bestimmt den größten Wert für b.	8(I)			
2.4	... bestimmt die Abbildungsmatrix für das Zurückdrehen des Rechtecks.	7(II)			
2.5	... bestimmt die Matrixdarstellung der Streckung und den Bildpunkt D'.	4(II)			
2.6	... zeigt, dass es sich bei der Menge der 2x2-Matrizen mit der Matrizenmultiplikation und -addition (M, +, ·) um einen Ring handelt.	14(III)			
	Summe Aufgabe 2	45			

### Auswahlaufgabe 3

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
3.1	... prüft rechnerisch den Sachverhalt.	7(II)			
3.2					
3.2.1	...berechnet die mittlere Änderungsrate des Spannungs-Zeit-Verlaufs für $U_8$ zwischen dem Messbeginn zum Zeitpunkt $t = 0$ ms und dem Erreichen des Normpegels zum Zeitpunkt $t = 4$ ms.	4(II)			
3.2.2	... ermittelt die maximale bzw. minimale Änderungsrate des Spannungs-Zeit-Verlaufs...	7(I)			
3.3	...bestimmt für $U_8$ mit einem numerischen Verfahren den Zeitpunkt, zu dem die Weißschwelle erstmalig erreicht wird.	8(II)			
3.4	... zeigt, dass der Wert des lokalen Maximums der Funktionenschar $U_k$ unabhängig vom Parameter k ist.	9(III)			
3.5					
3.5.1	... bestimmt den Mittelwert der Spannung $U_k$ in dem von den Nullstellen begrenzten Zeitintervall ...	7(I)			
3.5.2	...interpretiert das Ergebnis.	3(III)			
	Summe Auswahlaufgabe 3	45			



	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
	Summe Aufgabe 1, 2 und Auswahlaufgabe 3	135			

#### Auswahlaufgabe 4

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
4.1					
4.1.1	... stellt die Funktionsgleichung für g auf.	3(II)			
	... stellt die Funktionsgleichung für h auf.	5(II)			
4.1.2	...begründet, welches der drei Modelle noch annähernd genau den Verlauf der Virenausbreitung beschreibt.	4(III)			
4.1.3	...berechnet mit Hilfe des Modells C, wann über 1 Million Computer infiziert sind.	2(I)			
4.2	...bestimmt diejenige Funktion $a_{r,s}$ der Schar, die einen stetigen und differenzierbaren Anschluss an den Graphen der Funktion f zum Zeitpunkt $t = 7$ liefert.	5(II)			
4.3					
4.3.1	...bestimmt den Zeitpunkt, ab dem die meisten Rechner mit Viren befallen sind.	4(I)			
4.3.2	...bestimmt den Zeitpunkt, ab dem weniger als 1000 Rechner noch befallen sind.	4(I)			
4.3.3	... leitet den Zeitpunkt her, zu dem die Abnahmegeschwindigkeit der Virenausbreitung am höchsten ist.	5(III)			
4.4					
4.4.1	...skizziert je einen Graphen pro Graphentyp.	3(I)			
	...vergleicht die wesentlichen Merkmale/Eigenschaften der jeweiligen Typen in einer Übersicht.	5(III)			
4.4.2	...ermittelt die Ortskurve der Maxima der Funktionschar $a_s''$ .	5(II)			
	Summe Auswahlaufgabe 4	45			
	Summe Aufgabe 1, 2 und Auswahlaufgabe 4	135			



b) Darstellungsleistung - aufgabenübergreifend

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	stellt den Lösungsweg in strukturierter Form dar.	4			
2	beachtet die Qualität der äußeren Form und hält formale Regeln ein.	4			
3	verwendet Fachsprache und Fachsymbolik	4			
4	fertigt Zeichnungen, Grafiken und Tabellen in angemessener Qualität an.	3			
	<b>Summe Darstellungsleistung</b>	<b>15</b>			

		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	<b>Summe insgesamt (inhaltliche Leistung und Darstellungsleistung)</b>	<b>150</b>			
	<b>Aus der Punktesumme resultierende Note</b>				
	<b>Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 8 (4), APO-BK, Anlage D</b>				
	<b>Paraphe</b>				

Die Klausur wird abschließend mit der Note: \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_Notenpunkte) bewertet.

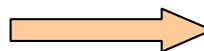
Unterschrift, Datum:



## Notenfindung

% Anteil erbrachter Leistung		Noten-Punkte	Notenstufen	Rohpunkte	
von	bis unter			von	bis
95%	100%	15	sehr gut plus	143	150
90%	95%	14	sehr gut	135	142
85%	90%	13	sehr gut minus	128	134
80%	85%	12	gut plus	120	127
75%	80%	11	gut	113	119
70%	75%	10	gut minus	105	112
65%	70%	9	befriedigend plus	98	104
60%	65%	8	befriedigend	90	97
55%	60%	7	befriedigend minus	83	89
50%	55%	6	ausreichend plus	75	82
45%	50%	5	ausreichend	68	74
39%	45%	4	ausreichend minus	58	67
32%	39%	3	mangelhaft plus	49	57
26%	32%	2	mangelhaft	40	48
20%	26%	1	mangelhaft minus	30	39
0%	20%	0	ungenügend	0	29

maximal erreichbare Gesamtpunktzahl



150