



Zentrale Abiturprüfung 2009

in den Bildungsgängen des Berufskollegs
1. Leistungskurs

Fach Mathematik

Fachbereich Informatik



Aufgabenstellung

Aufgabe 1

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation:

TrueType™ Schriften für eine Textverarbeitung im Computer lassen sich durch abschnittsweise definierte Polynome beschreiben. Sie haben bestimmte festgelegte Merkmale, müssen aber vor allem veränderbar sein. Beispielsweise wird ein Zeichen in der Schriftart Wingdings wie folgt dargestellt:

normal

kursiv

fett

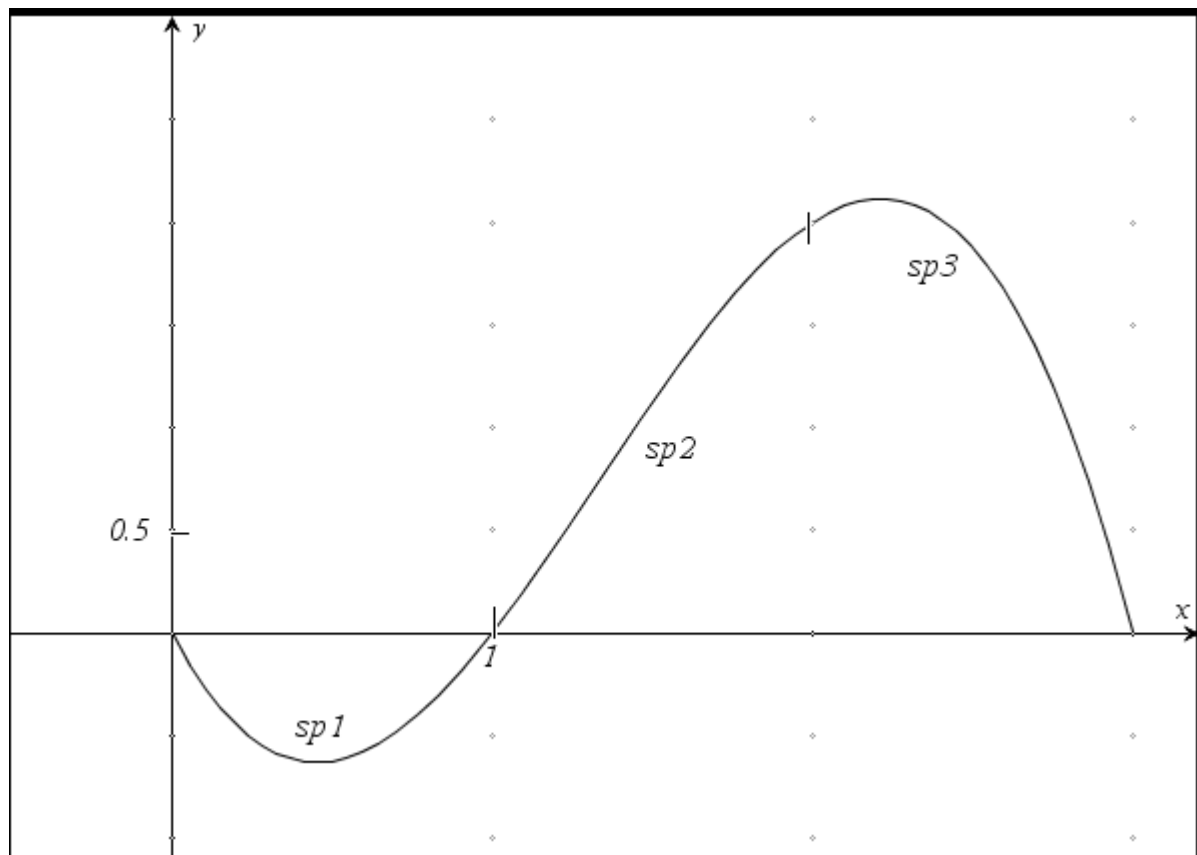
Ein anderes Zeichen soll durch die folgenden Punkte verlaufen:

$P_1(0/0), P_2(1/0), P_3(2/2), P_4(3/0)$

- 1.1 Ermitteln Sie in einem ersten Modell die Gleichung einer ganzrationalen Funktion f , deren Graph durch die vorgegebenen Punkte verläuft.
(Kontrollergesult: $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$) **(9 Punkte)**
- 1.2 Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f in das nachstehend abgebildete Koordinatensystem (Anlage zu Aufgabe 1.2). Bestimmen Sie hierzu die Extrem- und Wendepunkte der Funktion f . **(13 Punkte)**
- 1.3 In einem zweiten Modell verwenden Sie einen kubischen Spline anstelle einer ganzrationalen Funktion. Stellen Sie die Bedingungen für Splines durch die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 auf. Bezeichnen Sie hierbei den i -ten Abschnitt des Splines mit $sp_i(x)$. Beispielsweise ist eine Bedingung $sp_1(0)=0$. (Hinweis: Mit den Bedingungen sind keine weiteren Rechnungen durchzuführen!) **(6 Punkte)**
- 1.4 Leiten Sie den maximalen vertikalen Abstand zwischen den y -Koordinaten des Graphen von f und des Splines im Intervall $[0;1]$ her.
Für sp_1 gilt dabei $sp_1(x) = \frac{1}{5}(4x^3 - 4x)$, $0 \leq x \leq 1$. **(12 Punkte)**
- 1.5 Um ein Zeichen fett darzustellen, könnte man z.B. den Graphen von f im Intervall $[0; 3]$ um 0,1 Einheiten nach unten verschieben, so dass der Graph einer Funktion g entsteht. Das Zeichen erzeugt man durch Ausfüllen des Zwischenraums. Bestimmen Sie die Fläche des Zwischenraums. **(5 Punkte)**



Anlage zu Aufgabe 1.2



Aufgabe 2

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

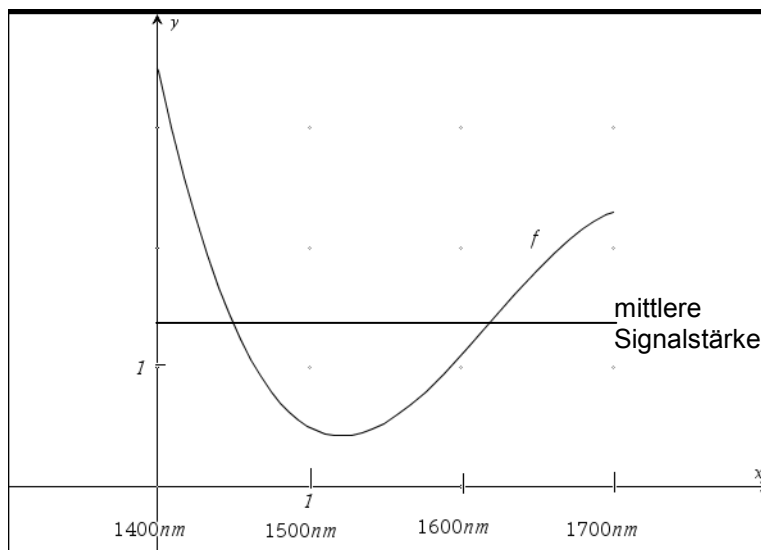
Beschreibung der Ausgangssituation:

In der modernen Datenübertragung werden neben Kupferleitungen auch Lichtwellenleiter eingesetzt. Diese bestehen aus dünnen Fasern aus lichtdurchlässigem Material (Kunststoff / Glas). Ein wesentlicher Vorteil des Lichtwellenleiters (LWL) besteht darin, dass lange Strecken ohne Verstärker überbrückt werden können.

Die Signalstärke der Verbindung hängt u. a. von der Wellenlänge des verwendeten Lichts ab (inkl. Infrarot und UV-Wellen). In einigen Bereichen des Spektrums ist die Dämpfung der Signalstärke aufgrund der verwendeten Materialien relativ gering. Wir betrachten beispielhaft den Wellenlängenbereich von 1400nm bis 1700nm. Die Skalierung auf der Wellenlängenchse wird so gewählt: $x=0$ entsprechen 1400nm und $x=3$ entsprechen 1700nm.

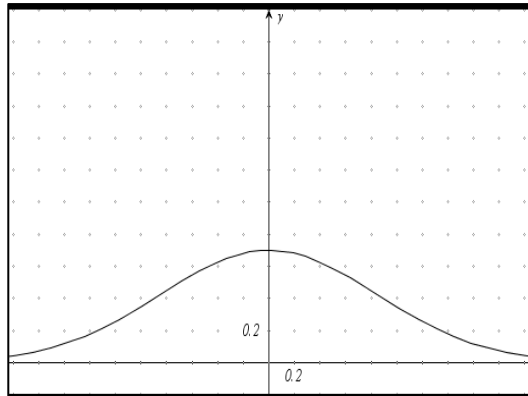
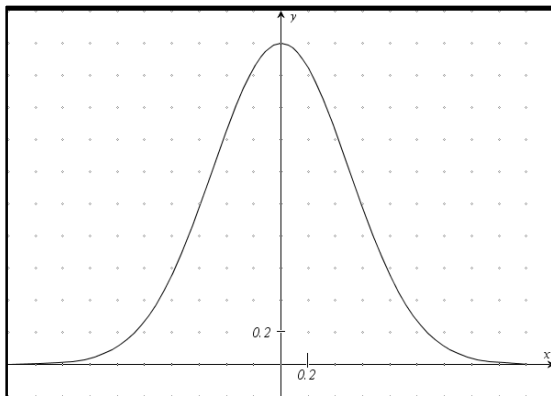
Innerhalb dieses Bereiches lässt sich der Einfluss des Materials auf die Signalstärke näherungsweise durch die Funktion

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{33}{10}x^2 - \frac{29}{5}x + \frac{7}{2}, \quad 0 \leq x \leq 3 \quad \text{beschreiben.}$$



- 2.1** Berechnen Sie, bei welcher Wellenlänge die Signalstärke am geringsten ist. Leiten Sie mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens den Wellenlängenbereich her, in dem die Signalstärke kleiner 1 ist. **(12 Punkte)**
- 2.2** Leiten Sie mit Hilfe der Integralrechnung die mittlere Signalstärke für den Wellenlängenbereich von 1400nm bis 1700nm her. **(8 Punkte)**

Durch ständige Reflektion an der Grenzfläche des LWL kommt es – wie bei einem Prisma – zu einer Auffächerung der verschiedenen Wellenlängen. Wenn eine Information als kurzer Puls ausgesandt wird, so „zerfließt“ dieser Informationspuls immer weiter (s. Skizzen).



Ein Lichtpuls soll durch die folgende Funktion angenähert werden:

$$g_a(x) = a \cdot e^{-ax^2}, \quad a > 0$$

- 2.3** Begründen Sie mit Hilfe des Definitions- und Wertebereiches, des Verhaltens im Unendlichen, der Achsenschnittpunkte, der Symmetrie sowie der Bestimmung der Extrempunkte der Funktionenschar g_a , dass es sich bei den obigen Schaubildern um Graphen von g_a handelt.
Geben Sie die bei den obigen Graphen verwendeten Werte des Parameters a an. **(11 Punkte)**

- 2.4** Ein Puls wird vom Empfänger erkannt, wenn die Änderungsrate des Pulses ein Extremum annimmt. Dieses Niveau ist durch die Wendepunkte bestimmt. Leiten Sie mit Hilfe der Differentialrechnung für den Fall $a=2$ das Intervall her, in dem der Puls oberhalb der Wendepunkte liegt, also vom Empfänger erkannt wird. **(8 Punkte)**

- 2.5** Durch oben beschriebenen Effekt „zerfließt“ der Puls bei langen Übertragungswegen, was u. a. durch die Ortskurve der Wendepunkte beschrieben werden kann. Der Wendepunkt der Funktionenschar g_a hat für $x > 0$ die Koordinaten $W_1\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}; a \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$. Leiten Sie die zugehörige Ortskurve her. **(6 Punkte)**



Auswahlaufgabe 3

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation:

Auch in Lichtwellenleitern (LWL) können Informationen fehlerhaft übertragen werden. Die Fehlerrate hängt u. a. von der Länge des LWLs ab. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Fehler unabhängig voneinander auftreten.

3.1 So liegt z.B. die Fehlerquote für eine 300m lange Leitung bei $p = 0,02$.

3.1.1 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 50 übermittelten Informationseinheiten

- kein Fehler auftritt
- 2 bis 3 Fehler auftauchen.

(6 Punkte)

3.1.2 Liegen maximal 5 Fehler vor, so sind diese durch Fehlerkorrektur behebbar. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Informationen trotz Fehlerkorrektur nicht nutzbar sind.

(4 Punkte)

3.2

3.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei $p = 0,05$ genau zwei Fehler direkt nacheinander übertragen werden.

(2 Punkte)

3.2.2 Leiten Sie die Wahrscheinlichkeit dafür her, dass bei 50 Zeichen das Ereignis „drei Fehler direkt hintereinander“ genau einmal auftritt.

(6 Punkte)

3.3 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein langer LWL eine Information fehlerhaft überträgt, sei $p = 0,08$. Bei der Verarbeitung der empfangenen Daten werden ebenfalls Fehler gemacht. Die Wahrscheinlichkeit hierfür sei $p = 0,06$.

3.3.1 Stellen Sie diesen Zusammenhang in einem Baumdiagramm grafisch dar.

(6 Punkte)

3.3.2 Aufgrund von Tests rechnet man für Informationsfehler, die durch Übertragung und/oder durch Verarbeitung entstehen, mit einer Wahrscheinlichkeit von $p=0,1352$. Begründen Sie den Wert mit Hilfe einer Rechnung.

(7 Punkte)



3.4 Die Fehlerwahrscheinlichkeit bei der Übertragung betrage $p = 0,05$. Ein Analyseprogramm zur Fehlererkennung arbeitet wie folgt:

Liegt ein Fehler vor, so erkennt das Programm diesen mit 96%-iger Wahrscheinlichkeit als Fehler.

Liegt kein Fehler vor, so erkennt das Programm diesen Fall zu 99%.

Das Analyseprogramm gibt einen Fehler aus. Es soll die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Fehlalarm handelt und tatsächlich kein Fehler vorliegt, bestimmt werden. Stellen Sie für diesen Zusammenhang eine 4-Felder-Tafel auf und leiten Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit her. **(14 Punkte)**

Für die gesamte Darstellungsleistung werden **15 Punkte** vergeben.

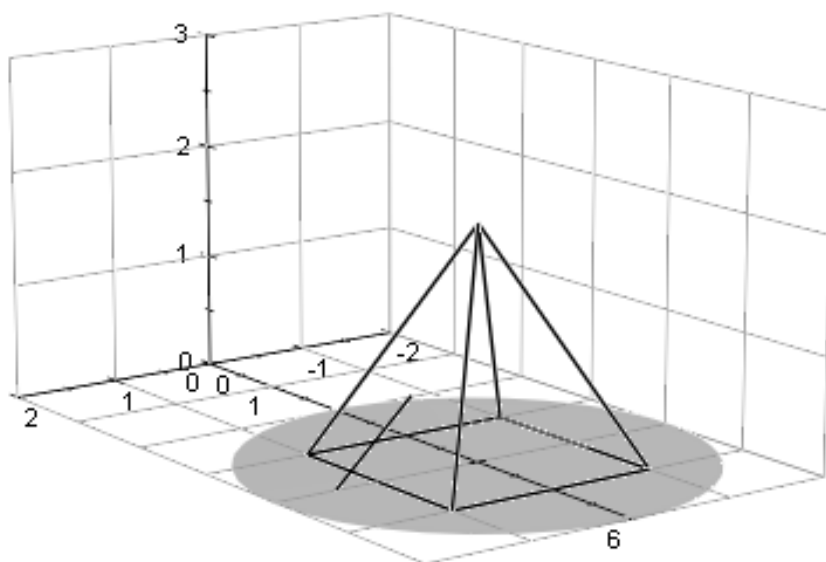
Maximal erreichbare Gesamtpunktzahl: **150 Punkte**

Auswahlaufgabe 4

(Gesamtpunktzahl 45 Punkte)

Beschreibung der Ausgangssituation:

Sie sind an der Programmierung des Spiels „Ratz Fatz In Einer Minute“ beteiligt. Zur Zeitkontrolle dreht sich eine Pyramide mit „Sekundenzeiger“ auf einer Kreisscheibe, die in der x_1x_2 -Ebene liegt.



- 4.1** Die Spitze der Pyramide wird durch den gemeinsamen Schnittpunkt der Geraden g_1, \dots, g_4 beschrieben. Die Eckpunkte der Grundfläche ergeben sich als Schnittpunkte der Geraden g_1, \dots, g_4 mit der x_1x_2 -Ebene.

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- 4.1.1** Prüfen Sie, ob sich alle vier Geraden im Punkt $A(0; 4; 2)$ schneiden.

(4 Punkte)

- 4.1.2** Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden g_1, \dots, g_4 mit der x_1x_2 -Ebene.

(8 Punkte)



Die Pyramide hat u. a. die Eckpunkte $A(0;4;2)$, $B(1;5;0)$ und $E(1;3;0)$. Durch eine punktförmige Öffnung in $F(\frac{2}{3};4;\frac{2}{3})$ im Dreieck ABE fällt ein Lichtstrahl aus der Pyramide auf die Kreisscheibe, die er im Punkt $G(\sqrt{2};4;0)$ trifft.

4.2 Zeigen Sie, dass F der Schwerpunkt des Dreiecks ABE ist und dass die Seitenhalbierenden sich dort im Verhältnis 2:1 schneiden. **(10 Punkte)**

4.3 Die Pyramide soll nun innerhalb einer Minute um eine Parallele zur x_3 -Achse durch den Punkt A gedreht werden. Dabei beschreibt ein von dem Lichtstrahl erzeugter Lichtpunkt in der x_1x_2 -Ebene einen Kreis.

(Hinweis: Die Rotationsmatrix $\text{Rot}_{\alpha, \text{Nullpunkt}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ bewirkt im \mathbb{R}^2 eine Rotation um den Nullpunkt, wobei der Winkel mathematisch negativ orientiert ist).

4.3.1 Stellen Sie die Gleichung einer affinen Abbildung auf, mit der die Position L' des Lichtpunktes $L(\sqrt{2};4)$ nach 10 Sekunden ermittelt werden kann. Leiten Sie die Lage des Punktes L' her. **(9 Punkte)**

4.3.2 Der Lichtpunkt hat sich bei der Rotation der Pyramide aus der Nullposition gedreht, so dass der Punkt $L(\sqrt{2};4)$ in den Punkt $L'(\frac{-\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} + 4)$ überführt wurde. Leiten Sie her, wie viele Sekunden vergangen sind. **(8 Punkte)**

4.4 Die Rotationsmatrix um die x_3 -Achse im \mathbb{R}^3 ist wie folgt definiert:

$$\text{Rot}_{\alpha, x_3\text{-Achse}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie unter zu Hilfenahme der Matrix $\text{Rot}_{\alpha, \text{Nullpunkt}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, warum die Abbildung mit der Matrix $\text{Rot}_{\alpha, x_3\text{-Achse}}$ eine Rotation im \mathbb{R}^3 bewirkt.

(6 Punkte)

Für die gesamte Darstellungsleistung werden **15 Punkte** vergeben.

Maximal erreichbare Gesamtpunktzahl: **150 Punkte**



Anhang

Tabellierte kumulierte Binomialverteilung

n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,125	1/6	0,2	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	k	n
20	0	6676	5438	4420	3585	1216	0692	0261	0115	0032	0008	0003	0000	0000	19	20
	1	9401	8802	8103	7358	3917	2669	1304	0692	0243	0076	0033	0005	0000	18	
	2	9929	9790	9561	9245	6769	5353	3287	2061	0913	0355	0176	0036	0002	17	
	3	9994	9973	9926	9841	8670	7653	5665	4114	2252	1071	0604	0160	0013	16	
	4		9997	9990	9974	9568	9050	7687	6296	4148	2375	1515	0510	0059	15	
	5			9999	9997	9887	9688	8982	8042	6172	4164	2972	1256	0207	14	
	6					9976	9916	9629	9133	7858	6080	4793	2500	0577	13	
	7					9996	9981	9887	9679	8982	7723	6615	4159	1316	12	
	8					9999	9997	9972	9900	9591	8867	8095	5956	2517	11	
	9						9999	9994	9974	9861	9520	9081	7553	4119	10	
	10							9999	9994	9961	9829	9624	8725	5881	9	
	11								9999	9991	9949	9870	9435	7483	8	
	12									9998	9987	9963	9790	8684	7	
	13										9997	9991	9935	9423	6	
	14											9998	9984	9793	5	
	15												9997	9941	4	
	16													9987	3	
	17													9998	2	
	18														1	
	19														0	

n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,125	1/6	0,2	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	k	n
30	0	5455	4010	2939	2146	0424	0182	0042	0012	0002	0000	0000	0000	0000	29	30
	1	8795	7731	6612	5535	1837	0962	0295	0105	0020	0003	0001	0000	0000	28	
	2	9783	9399	8831	8122	4114	2579	1028	0442	0106	0021	0007	0000	0000	27	
	3	9971	9881	9694	9392	6474	4734	2396	1227	0374	0093	0033	0003	0000	26	
	4	9997	9982	9937	9844	8245	6812	4243	2552	0979	0302	0122	0015	0000	25	
	5		9998	9989	9967	9268	8356	6164	4275	2026	0766	0355	0057	0002	24	
	6			9999	9994	9742	9275	7765	6070	3481	1595	0838	0172	0007	23	
	7				9999	9922	9725	8863	7608	5143	2814	1668	0435	0026	22	
	8					9980	9910	9494	8713	6736	4315	2860	0940	0081	21	
	9					9995	9974	9803	9389	8034	5888	4317	1763	0214	20	
	10					9999	9994	9933	9744	8943	7304	5848	2915	0494	19	
	11						9999	9980	9905	9493	8407	7239	4311	1002	18	
	12							9995	9969	9784	9155	8340	5785	1808	17	
	13							9999	9991	9918	9599	9102	7145	2923	16	
	14								9998	9973	9831	9565	8246	4278	15	
	15								9999	9992	9936	9812	9029	5722	14	
	16									9998	9979	9928	9519	7077	13	
	17										9994	9975	9788	8192	12	
	18											9998	9993	9917	11	
	19												9998	9971	10	
	20													9991	9	
	21													9998	8	
	22														7	
	23														6	
	24														5	
n	k	0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	0,875	5/6	0,8	0,75	0,7	2/3	0,6	0,5	k	n



n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,1	0,125	1/6	0,2	0,25	0,3	1/3	0,4	0,5	k	n
50	0	3642	2181	1299	0769	0052	0013	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	49	50
	1	7358	5553	4005	2794	0338	0103	0012	0002	0000	0000	0000	0000	0000	48	
	2	9216	8108	6767	5405	1117	0418	0066	0013	0001	0000	0000	0000	0000	47	
	3	9822	9372	8609	7604	2503	1138	0238	0057	0005	0000	0000	0000	0000	46	
	4	9968	9832	9510	8964	4312	2346	0643	0185	0021	0002	0000	0000	0000	45	
	5	9995	9963	9856	9622	6161	3935	1388	0480	0070	0007	0001	0000	0000	44	
	6	9999	9993	9964	9882	7702	5637	2506	1034	0194	0025	0005	0000	0000	43	
	7		9999	9992	9968	8779	7165	3911	1904	0453	0073	0017	0001	0000	42	
	8			9999	9992	9421	8339	5421	3073	0916	0183	0050	0002	0000	41	
	9				9998	9755	9121	6830	4437	1637	0402	0127	0008	0000	40	
	10					9906	9579	7986	5836	2622	0789	0284	0022	0000	39	
	11					9968	9817	8827	7107	3816	1390	0570	0057	0000	38	
	12					9990	9928	9373	8139	5110	2229	1035	0133	0002	37	
	13					9997	9974	9693	8894	6370	3279	1715	0280	0005	36	
	14					9999	9991	9862	9393	7481	4468	2612	0540	0013	35	
	15						9997	9943	9692	8369	5692	3690	0955	0033	34	
	16						9999	9978	9856	9017	6839	4868	1561	0077	33	
	17							9992	9937	9449	7822	6046	2369	0164	32	
	18							9997	9975	9713	8594	7126	3356	0325	31	
	19							9999	9991	9861	9152	8036	4465	0595	30	
	20								9997	9937	9522	8741	5610	1013	29	
	21								9999	9974	9749	9244	6701	1611	28	
	22									9990	9877	9576	7660	2399	27	
	23									9996	9944	9778	8438	3359	26	
	24									9999	9976	9892	9022	4439	25	
	25										9991	9951	9427	5561	24	
	26										9997	9979	9686	6641	23	
	27										9999	9992	9840	7601	22	
	28											9997	9924	8389	21	
	29											9999	9966	8987	20	
	30												9986	9405	19	
	31												9995	9675	18	
	32												9998	9836	17	
	33												9999	9923	16	
	34													9967	15	
	35													9987	14	
	36													9995	13	
	37													9998	12	
n	k	0,98	0,97	0,96	0,95	0,9	0,875	5/6	0,8	0,75	0,7	2/3	0,6	0,5	k	n